

# Механика

УДК 539.389.4

## Методика построения нелинейного определяющего соотношения при малом числе циклов растяжения для однонаправленного углепластика с термопластичной матрицей

Е.И. Фомина<sup>1</sup>, М.В. Худорожко<sup>1,2</sup>, М.А. Алимов<sup>1</sup>, А.М. Думанский<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана

## A method for constructing a nonlinear constitutive relation at the low number of the tensile cycles for the unidirectional CFRP with a thermoplastic matrix

E.I. Fomina<sup>1</sup>, M.V. Khudorozhko<sup>1,2</sup>, M.A. Alimov<sup>1</sup>, A.M. Dumansky<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University

Элементы большинства конструкций обычно эксплуатируются при переменных во времени нагрузках, поэтому важно спрогнозировать поведение материалов с помощью моделей. Рассмотрены основные виды определяющих соотношений, используемых для описания нелинейного поведения композиционных материалов. Проанализированы закономерности анизотропии механического поведения однонаправленного углепластика с термопластичной матрицей при малом числе циклов нагружения. Реологическое поведение и физическая нелинейность при внутрислойном сдвиге обусловлены свойствами полимерной матрицы и ее адгезией к волокну. Для изучения такого поведения предложен метод построения наследственного определяющего соотношения на основе результатов испытаний на растяжение однонаправленных образцов под разными углами к направлению армирования. Применимость модели апробирована на углепластике AS4/PEEK с термопластичной матрицей, параметры наследственного соотношения получены с помощью градиентного метода Левенберга — Марквардта минимизацией невязки расчетных и экспериментальных значений деформаций. Результаты сравнения экспериментальных кривых с расчетными показали способность модели описывать основные характеристики петель гистерезиса при нескольких циклах нагружения, а также деформирование с постоянной скоростью.

EDN: OJIPJY, <https://elibrary/ojipjy>

**Ключевые слова:** наследственная упругость, ядро Абеля, нелинейная деформация, петли гистерезиса

Elements of most structures are usually operated under the time-varying loads; therefore, the material behavior models under such types of loading are acquiring utmost importance. The paper considers main types of the constitutive relations used to describe nonlinear behavior of the composite materials. It analyzes regularities in the anisotropy of mechanical behavior of the unidirectional carbon fiber reinforced plastic (CFRP) with a thermoplastic matrix under a small number of the loading cycles. Rheological behavior and physical nonlinearity under the intralayer shear are caused by the polymer matrix properties and its adhesion to the fiber. To study this behavior, the paper proposes a method for constructing a hereditary constitutive relation based on results of the tensile testing the unidirectional specimens at different angles to the reinforcement direction. The model applicability is tested on AS4/PEEK CFRP with a thermoplastic matrix; the hereditary relation parameters are obtained using the Levenberg-Marquardt gradient method by minimizing discrepancy between the calculated and experimental values of deformations. Results of comparing the experimental curves and the calculated ones demonstrate the model's ability to describe main characteristics of the hysteresis loops under several loading cycles, as well as deformation at the constant rate.

EDN: OJIPJY, <https://elibrary/ojipjy>

**Keywords:** hereditary elasticity, Abel kernel, nonlinear deformation, hysteresis loops

Благодаря уникальным свойствам и относительной простоте производства композиционные материалы с термопластичной матрицей нашли широкое применение в авиакосмической промышленности, машиностроении и других отраслях. В частности, из полимерных композитов изготавливают такие элементы самолетов, как передняя кромка и нервюры крыла, рули направления, горизонтальные хвостовые стабилизаторы, обшивка мотогондолы и различные узлы крепления [1].

Вязкоупругие эффекты проявляются в полимерах при длительных умеренных и вибрационных нагрузках, а необратимые деформации — при повышенной нагрузке, особенно при внутрислойном сдвиге. Это подтверждено результатами испытаний образцов на растяжение под разными углами к направлению армирования (далее углы армирования) [2].

В работе [3] приведены результаты моделирования нелинейной деформации и прогрессирующего разрушения термопластичных полимеров. Неупругое поведение объяснено вкладом деформаций вязкоупругости, вязкопластичности, нелинейного изотропного и кинематического упрочнений и пластического повреждения. Модель представляла собой систему вложенных друг в друга соотношений, описывающих кинетику вязкоупругих, вязкопластических деформаций и трещинообразования. Эксперименты показали, что на линейном участке кривые деформирования при разных скоростях нагружения близки, а в нелинейной области — существенно различаются. Такая модель дает хоро-

шую сходимость расчетных данных с экспериментальными при скоростном и циклическом нагружении.

Для прогнозирования поведения однонаправленного углепластика AS4/PEEK предложена микромеханическая модель матрицы, армированной непрерывными волокнами, представителем элементом которого служит элементарная ячейка прямоугольной формы [4]. На границе раздела волокна с матрицей предполагалось идеальное соединение, свойства углеродных волокон приняты линейноупругими и трансверсально-изотропными, а смолы PEEK — упруговязкопластическими. Упругое поведение матрицы описано линейным законом Гука, вязкопластическое — моделью, учитывающей кинематическое и изотропное упрочнения [5].

Определяющее соотношение (ОС) Шепери [6, 7], параметры которого получены по результатам испытаний на ползучесть и релаксацию, демонстрирует принцип напряженно-временной аналогии и позволяет описывать закономерности нелинейного поведения вязкоупругих материалов. При некоторых упрощающих условиях, если принять нелинейные параметры ОС, зависящие от напряжений, равными единице, то ОС Шепери вырождается в уравнение наследственной упругости.

В расчетах на линейных участках кривых деформирования при скоростном нагружении использованы аппроксимирующие зависимости для поперечного и сдвигового модулей, а также прочности матрицы от логарифма скорости [8].

В статье [9] предложена методика построения ОС наследственного типа, заключающаяся в разложении общей деформации слоистого элемента на упругую, временную обратимую и необратимую составляющие. Выполнено моделирование монослоя в виде слоев, обладающих упругими и вязкоупругими свойствами, которые впоследствии собраны в многонаправленный пакет со свойствами, определенными по результатам численных экспериментов при простых видах нагружения.

Цель исследования — разработка методики построения ОС, позволяющего описывать закономерности механического поведения углепластиков в условиях переменного во времени нагружения.

В качестве модели поведения материала использовано интегральное представление Вольтерры — Фреше с функцией Абеля в качестве ядра. Идентификация параметров предложенного ОС выполнена методом наименьших квадратов с помощью численных алгоритмов градиентной оптимизации.

**Экспериментальные данные.** В качестве экспериментальных данных использовали результаты оцифровки кривых циклического деформирования однонаправленных образцов из углепластика AS4/PEEK при растяжении под разными углами армирования при температуре 100 °С [4], т. е. без учета влияния последней.

Испытания образцов на растяжение выполняли при угле армирования  $\theta = 10, 30, 45$  и  $60^\circ$ . В качестве примера на рис. 1 приведены экспериментальные кривые деформирования образца из углепластика AS4/PEEK при циклическом и скоростном нагружениях со скоростью де-

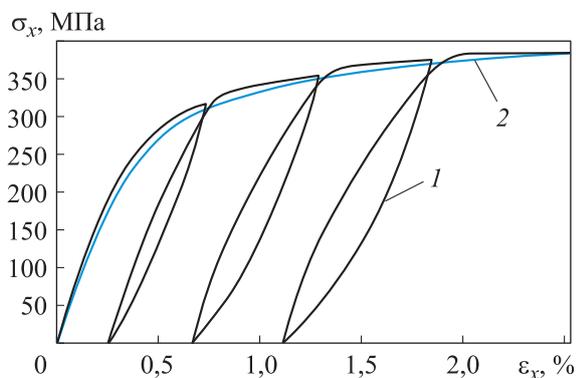


Рис. 1. Экспериментальные кривые деформирования образца из углепластика AS4/PEEK при циклическом (1) и скоростном (2) нагружениях для угла армирования  $\theta = 10^\circ$

формации  $\dot{\varepsilon} = 1\%$ /мин для угла армирования  $\theta = 10^\circ$ . Введены следующие обозначения:  $\sigma_x$  — напряжение вдоль оси  $x$ ;  $\varepsilon_x$  — деформация вдоль оси  $x$ . Огибающие кривые при циклическом и скоростном деформировании довольно близки, что естественно для первого активного участка и свидетельствует о слабой чувствительности механических свойств материала к наличию циклов нагружения.

Циклическое нагружение проведено с увеличивающимся пиковым уровнем напряжения до разрушения со скоростью деформации  $\dot{\varepsilon} = 1\%$ /мин как при нагружении, так и при разгрузке до полного снятия напряжений в каждом цикле.

**Построение ОС.** Для описания нелинейного поведения материалов использовано уравнение Работнова [10]

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) K(t-\tau) d\tau,$$

где  $\varphi(\varepsilon)$  — кривая мгновенного деформирования;  $\sigma$  — напряжение;  $t$  и  $\tau$  — текущее время и предшествующее ему значение соответственно;  $K$  — ядро оператора.

Кривые деформирования можно получить путем «сползания» с мгновенной кривой на величину

$$\int_0^t \sigma(\tau) K(t-\tau) d\tau.$$

При умеренном напряжении в качестве первого приближения можно использовать линейное соотношение с ядром Абеля [10, 11]

$$E\varepsilon(t) = \sigma(t) + \frac{k}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^\alpha \sigma(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где  $E$  — мгновенный модуль упругости;  $\varepsilon$  — деформация;  $k$  — коэффициент;  $\Gamma(\dots)$  — гамма-функция;  $\alpha$  — параметр сингулярности ядра,  $-1 < \alpha < 0$ .

Уравнение (1) не учитывает физическую нелинейность и вязкопластические свойства материала, поэтому при его использовании не будут формироваться экспериментально наблюдаемые петли гистерезиса. Зависимость такого рода можно применять только при относительно малых значениях напряжения.

Уравнение наследственной теории упругости можно представить в виде ряда интегральных членов [12]

$$e = \int_{-\infty}^t J_1(t-\tau_1) d\sigma(\tau_1) + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t J_2(t-\tau_1, t-\tau_2) d\sigma(\tau_1) d\sigma(\tau_2) + \dots, \quad (2)$$

где  $J_1, J_2, \dots$  — ядра наследственности.

Большое количество интегральных членов ряда (2) приводит к плохо обусловленной системе уравнений, поэтому точное определение вида всех наследственных ядер не представляется возможным. Для упрощения ОС (2) в работах [10, 13] предложено принять каждое ядро  $J_k$  как произведение одинаковых функций от  $k$  различных аргументов

$$J_k(t-\tau_1, t-\tau_2, \dots, t-\tau_k) = a_k \prod_{s=1}^k J_0(t-\tau_s).$$

Тогда выражение (2) можно записать как

$$\varepsilon = a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots + a_k s^k. \quad (3)$$

Здесь  $a_1, a_2, \dots, a_k$  — коэффициенты интегрального разложения;

$$s = (1 + K^*)\sigma,$$

где  $K^*$  — интегральный оператор, действующий на напряжения  $f$ , определяемый как

$$K^* f = \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

В качестве ядра оператора  $K^*$  использовано ядро Абеля [13]

$$s = \sigma(t) + \frac{k}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^\alpha \sigma(\tau) d\tau.$$

**Методика расчета параметров ОС.** При деформировании с постоянной скоростью  $\varepsilon_x(t) = \dot{\varepsilon}_x t$  зависимость деформации вдоль оси  $x$   $\varepsilon(t)$  имеет вид четырех пилообразных циклов, показанных на рис. 2, а. Реакция материала на такое воздействие в виде напряжений от времени  $\sigma(t)$  восстанавливается с помощью экспериментальной кривой циклического нагружения как зависимость от деформаций, а затем и от времени.

Полученные зависимости деформации  $\varepsilon_x$  и напряжения  $\sigma_x$  вдоль оси  $x$  от времени  $t$  при угле армирования  $\theta = 10^\circ$  приведены на рис. 2. Видно, что начальные участки активного нагружения близки к линейным. С ростом максимальной деформации область линейности

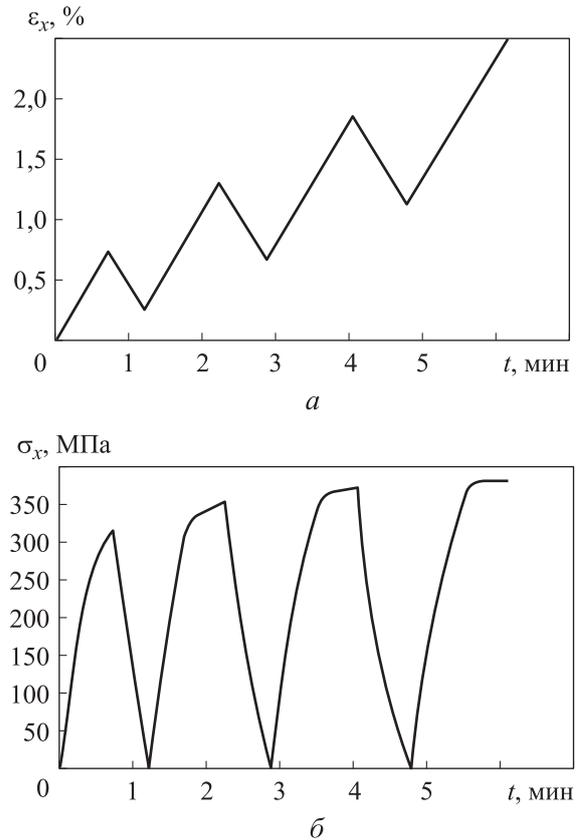


Рис. 2. Зависимости деформации  $\varepsilon_x$  (а) и напряжения  $\sigma_x$  (б) вдоль оси  $x$  от времени  $t$  при угле армирования  $\theta = 10^\circ$

увеличивается, что может быть обусловлено упрочнением материала. Однако далее следуют почти прямолинейные участки нелинейности, наклон которых уменьшается при увеличении деформации, что может свидетельствовать о разупрочнении.

В случае нелинейного уравнения (3) коэффициенты полинома определяют методом наименьших квадратов путем минимизации невязки между экспериментальными и расчетными данными:

$$\left\| \varepsilon_x^{exp} - \varepsilon_x^{calc}(\alpha, k, \mathbf{a}) \right\| \rightarrow \min_{\substack{-1 < \alpha < 0 \\ \mathbf{a} \in R^3}}$$

где  $\varepsilon_x^{exp}$  и  $\varepsilon_x^{calc}$  — экспериментальные и расчетные деформации вдоль оси  $x$ ;  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}^T$  — коэффициенты полинома (3).

Параметры ОС определяют численно с помощью градиентного метода Левенберга — Марквардта, представляющего собой итерационный алгоритм, в котором использовано направление поиска, являющееся средним между направлениями Гаусса — Ньютона и наискорейшего спуска [14].

Для лучшего совпадения теоретической и экспериментальной кривых необходимо учесть вязкопластичность материала, добавив уравнения из теории вязкопластичности, например, из модели, приведенной в работах [5, 15].

Также возможен подход с разбиением участка первого нагружения на линейную и нелинейную области. В линейной области следует использовать только первый член уравнения (3). Тогда физический смысл коэффициента  $a_1$  заключается в том, что он является обратной величиной к мгновенному модулю упругости. Коэффициенты интегрального разложения  $a_2$  и  $a_3$  определяют в нелинейной области.

**Анализ результатов расчета.** Проведенный анализ показал, что третьей степени полинома (3) оказывается достаточно для аппроксимации нелинейных кривых деформирования. Увеличение степени в разложении не приводит к существенному улучшению результатов, но уменьшает устойчивость решения и увеличивает риск появления осцилляций решения при экстраполяции данных. Это обусловлено свойствами полиномов. Увеличение количества членов разложения может привести к полиномиальному раскачиванию [16].

Значения параметров ядра  $\alpha$ ,  $k$  и коэффициентов полинома  $a_1, a_2, a_3$ , полученные в результате решения задачи оптимизации, при различных значениях угла армирования  $\theta$  приведены в табл. 1.

Приняв в качестве постоянной материала параметр сингулярности ядра Абея  $\alpha$  и усреднив его по четырем значениям для разных углов армирования, пересчитали коэффициенты ОС (3). Результаты пересчета — значения оптимизированных параметров при параметре сингулярности ядра  $\alpha = -0,4875$  — приведены в табл. 2.

В диапазоне параметра ядра сингулярности  $-0,4 < \alpha < -0,5$  для любого  $\alpha$  можно найти коэффициенты полинома, позволяющие описать экспериментальные данные с достаточной для практики точностью.

В соответствии с выражением (3) при угле армирования  $\theta = 10, 30, 45$  и  $60^\circ$  построены графики гистерезиса для третьей степени разложения полинома при постоянном параметре сингулярности ядра  $\alpha$ , приведенные на рис. 3. Видно, что с увеличением угла армирования параметр ядра Абея  $k$  практически линейно уменьшается.

При углах армирования до  $45^\circ$  с ростом уровня нагрузки и числа циклов увеличиваются ширина петель гистерезиса и их наклон к оси абсцисс (см. рис. 1), что свидетельствует о разупрочнении. При углах армирования более  $45^\circ$  петли гистерезиса резко сужаются, что указывает на уменьшение сдвигового напряжения. Ширина петель гистерезиса при  $\theta = 60^\circ$  значительно меньше, чем при других углах армирования, что связано с выбором максимального значения напряжений в четырех циклах нагружения–разгрузки.

Таблица 1

Значения оптимизированных параметров

$\theta$ , град	$\alpha$	$k$ , $1/c^a$	$a_1$ , %/МПа	$a_2$ , %/МПа <sup>2</sup>	$a_3$ , %/МПа <sup>3</sup>
10	-0,3949	1,5938	0,0065	0,0018	-0,0000877
30	-0,4762	1,1837	0,0253	0,0364	-0,0178000
45	-0,4340	1,0100	0,0309	0,0937	-0,0685000
60	-0,6451	0,1538	0,0744	0,0777	-0,6451000

Таблица 2

Значения оптимизированных параметров при параметре сингулярности ядра  $\alpha = -0,4875$ 

$\theta$ , град	$k$ , $1/c^a$	$a_1$ , %/МПа	$a_2$ , %/МПа <sup>2</sup>	$a_3$ , %/МПа <sup>3</sup>
10	2,4800	0,0039	0,0010	-0,000047
30	1,2387	0,0241	0,0342	-0,016000
45	1,2613	0,0245	0,0673	-0,038400
60	0,1411	0,0814	0,0712	0,325400

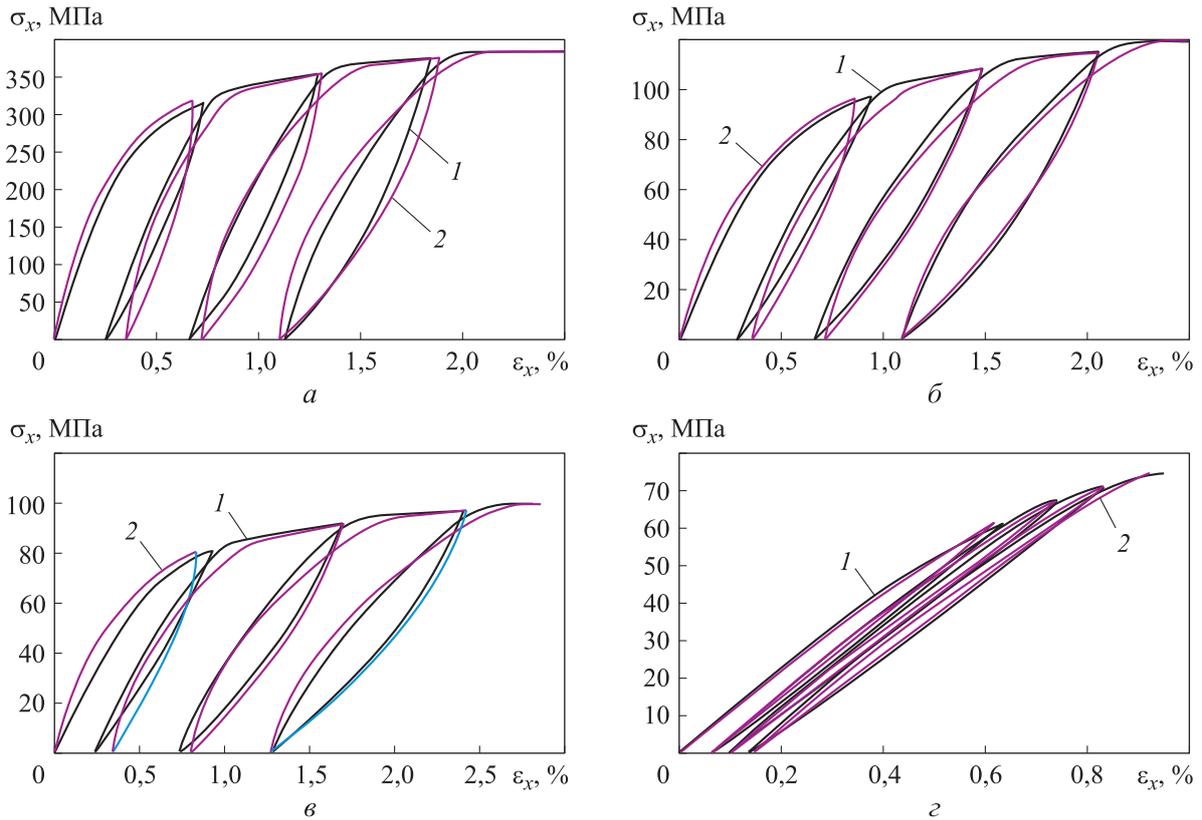


Рис. 3. Расчетные (1) и аппроксимирующие (2) кривые циклического нагружения образца из углепластика AS4/PEEK при угле армирования  $\theta = 10$  (а),  $30$  (б),  $45$  (в) и  $60^\circ$  (г)

С помощью уравнения (3) можно описать монотонное деформирование материала при скорости  $\dot{\epsilon} = 1\%/мин$ . Расчетные и экспериментальные кривые деформирования образца из углепластика AS4/PEEK приведены на рис. 4. Там же показана расчетная кривая циклического нагружения (черная кривая) при постоянном значении параметра сингулярности ядра  $\alpha$  для соответствующего угла армирования. Мо-

дель удовлетворительно описывает поведение углепластика в вязкоупругой области.

Кривые линейной регрессии параметра ядра  $k$  и коэффициентов полинома  $a_1 - a_3$  приведены на рис. 5. Зеленые точки соответствуют расчетным значениям параметра ядра  $k$ , красные — коэффициента  $a_1$ , синие — коэффициента  $a_2$ , сиреневые — коэффициента  $a_3$ . Так как уравнения для первого и второго

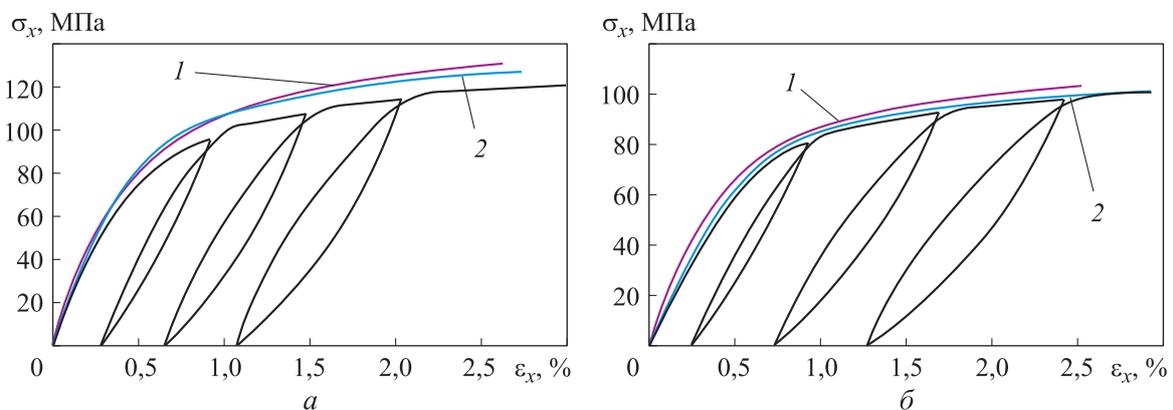


Рис. 4. Расчетные (1) и экспериментальные (2) кривые деформирования образца из углепластика AS4/PEEK при скоростном (а) и циклическом (б) нагружениях

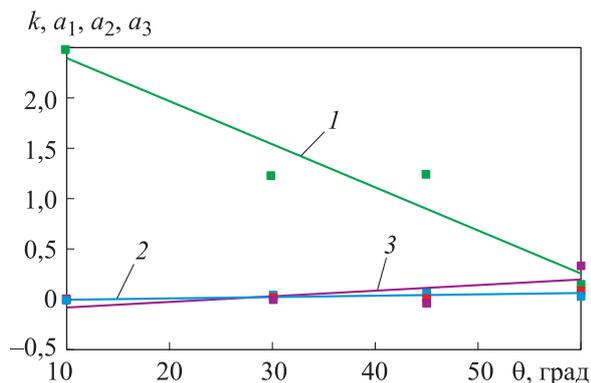


Рис. 5. Кривые линейной регрессии параметра ядра  $k$  (1) и коэффициентов полинома  $a_1$ ,  $a_2$  (2) и  $a_3$  (3)

коэффициентов полинома близки, их кривые наложались друг на друга.

## Выводы

1. Предложена методика построения ОС наследственного типа для анизотропии однонаправленных армированных термопластичных полимеров при переменном нагружении. Анализ кривых деформирования при циклическом нагружении позволил более точно опре-

делить параметры аппроксимирующего полинома и получить более корректную форму ОС. Изохронная кривая деформирования приведена к параметрической форме зависимости деформации и напряжения от времени, что позволило выявить количественные и качественные особенности упрочнения и разупрочнения материала.

2. Построение ОС основано на интегральном уравнении Вольтерры — Фреше с ядром Абеля, определение параметров которого выполнено методом наименьших квадратов с использованием численного градиентного алгоритма. Полученное ОС показало хорошую сходимость с экспериментальными данными для образцов однонаправленного углепластика AS4/PEEK, нагружаемых под разными углами армирования.

3. Определены значения параметров ядра Абеля и коэффициентов полинома для разных углов армирования. Кривые деформирования незначительно зависят от флуктуации параметра сингулярности ядра Абеля, что позволило выполнить его осреднение и пересчитать коэффициенты полинома, определяющего нелинейное поведение.

## Литература

- [1] Zeyrek B.Y., Aydogan B., Dilekcan E. et al. Review of thermoplastic composites in aerospace industry. *IJETI*, 2022, vol. 3, no. 1, pp. 1–6, doi: <https://doi.org/10.51626/ijeti.2022.03.00031>
- [2] Surret Y., Vautrin A. Plastic behaviour of fibrous laminae. *Compos. Sci. Technol.*, 1993, vol. 49, no. 1, pp. 45–50, doi: [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(93\)90020-H](https://doi.org/10.1016/0266-3538(93)90020-H)
- [3] Krairi A., Doghri I. A thermodynamically-based constitutive model for thermoplastic polymers coupling viscoelasticity, viscoplasticity and ductile damage. *Int. J. Plast.*, 2014, vol. 60, pp. 163–181, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.04.010>
- [4] Kawai M., Masuko Y., Kawase Y. et al. Micromechanical analysis of the off-axis rate-dependent inelastic behavior of unidirectional AS4/PEEK at high temperature. *Int. J. Mech. Sci.*, 2001, vol. 43, no. 9, pp. 2069–2090, doi: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(01\)00029-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00029-7)
- [5] Lemaitre J., Chaboche J.L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1990. 556 p.
- [6] Schapery R.A. On the characterization of nonlinear viscoelastic materials. *Polym. Eng. Sci.*, 1969, vol. 9, no. 4, pp. 295–310, doi: <https://doi.org/10.1002/pen.760090410>
- [7] Haj-Ali R.M., Muliana A.H. A micromechanical constitutive framework for the nonlinear viscoelastic behavior of pultruded composite materials. *Int. J. Solids Struct.*, 2003, vol. 40, no. 5, pp. 1037–1057, doi: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00663-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00663-7)
- [8] Daniel I.M., Werner B.T., Fenner J.S. Strain-rate-dependent failure criteria for composites. *Compos. Sci Technol.*, 2011, vol. 71, no. 3, pp. 357–364, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2010.11.028>
- [9] Паймушин В.Н., Каюмов Р.А., Холмогоров С.А. Об одном методе решения задач о неупругом деформировании слоистого композита. *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2021, № 6, с. 55–66, doi: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-6-55-66>
- [10] Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. Москва, Наука, 1977. 383 с.

- [11] Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление полимерных и композитных материалов*. Рига, Зинатне, 1980. 571 с.
- [12] Huang N.C., Lee E.H. Nonlinear viscoelasticity for short time ranges. *J. Appl. Mech.*, 1966, vol. 33, no. 2, pp. 313–321, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3625043>
- [13] Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела*. Москва, Наука, 1979. 744 с.
- [14] Kazemi P., Renka R.J. A Levenberg–Marquardt method based on Sobolev gradients. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2012, vol. 75, no. 16, pp. 6170–6179, doi: <https://doi.org/10.1016/j.na.2012.06.022>
- [15] Motta E.P., Reis J.M.L., Mattos H.S. Modelling the cyclic elasto–viscoplastic behavior of polymers. *Polym. Testing*, 2019, vol. 78, art. 105991, doi: <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2019.105991>
- [16] Мэттьюс Д.Г., Финк К.Д. *Численные методы. Использование MATLAB*. Москва, Вильямс, 2001. 713 с.

## References

- [1] Zeyrek B.Y., Aydogan B., Dilekcan E. et al. Review of thermoplastic composites in aerospace industry. *IJETI*, 2022, vol. 3, no. 1, pp. 1–6, doi: <https://doi.org/10.51626/ijeti.2022.03.00031>
- [2] Surrel Y., Vautrin A. Plastic behaviour of fibrous laminae. *Compos. Sci. Technol.*, 1993, vol. 49, no. 1, pp. 45–50, doi: [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(93\)90020-H](https://doi.org/10.1016/0266-3538(93)90020-H)
- [3] Krairi A., Doghri I. A thermodynamically–based constitutive model for thermoplastic polymers coupling viscoelasticity, viscoplasticity and ductile damage. *Int. J. Plast.*, 2014, vol. 60, pp. 163–181, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.04.010>
- [4] Kawai M., Masuko Y., Kawase Y. et al. Micromechanical analysis of the off-axis rate-dependent inelastic behavior of unidirectional AS4/PEEK at high temperature. *Int. J. Mech. Sci.*, 2001, vol. 43, no. 9, pp. 2069–2090, doi: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(01\)00029-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00029-7)
- [5] Lemaitre J., Chaboche J.L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1990. 556 p.
- [6] Schapery R.A. On the characterization of nonlinear viscoelastic materials. *Polym. Eng. Sci.*, 1969, vol. 9, no. 4, pp. 295–310, doi: <https://doi.org/10.1002/pen.760090410>
- [7] Haj-Ali R.M., Muliana A.H. A micromechanical constitutive framework for the nonlinear viscoelastic behavior of pultruded composite materials. *Int. J. Solids Struct.*, 2003, vol. 40, no. 5, pp. 1037–1057, doi: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00663-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00663-7)
- [8] Daniel I.M., Werner B.T., Fenner J.S. Strain–rate–dependent failure criteria for composites. *Compos. Sci Technol.*, 2011, vol. 71, no. 3, pp. 357–364, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2010.11.028>
- [9] Paymushin V.N., Kayumov R.A., Kholmogorov S.A. On a method for solving inelastic deformation problems of a laminated composite. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 2021, no. 6, pp. 55–66, doi: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-6-55-66> (in Russ.). (Eng. version: *Russ Math.*, 2021, vol. 65, no. 6, pp. 47–56, doi: <https://doi.org/10.3103/S1066369X21060062>)
- [10] Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary solid mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 383 p. (In Russ.).
- [11] Malmeyster A.K., Tamuzh V.P., Tetters G.A. *Soprotivlenie polimernykh i kompozitnykh materialov* [Resistance of polymers and composites]. Riga, Zinatne Publ., 1980. 571 p. (In Russ.).
- [12] Huang N.C., Lee E.H. Nonlinear viscoelasticity for short time ranges. *J. Appl. Mech.*, 1966, vol. 33, no. 2, pp. 313–321, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3625043>
- [13] Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 744 p. (In Russ.).
- [14] Kazemi P., Renka R.J. A Levenberg–Marquardt method based on Sobolev gradients. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2012, vol. 75, no. 16, pp. 6170–6179, doi: <https://doi.org/10.1016/j.na.2012.06.022>
- [15] Motta E.P., Reis J.M.L., Mattos H.S. Modelling the cyclic elasto–viscoplastic behavior of polymers. *Polym. Testing*, 2019, vol. 78, art. 105991, doi: <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2019.105991>

- [16] Mathews J.H., Fink K.D. *Numerical methods using MATLAB*. Prentice Hall, 1999. 662 p. (Russ. ed.: *Chislennye metody. Ispolzovanie MATLAB*. Moscow, Vilyams Publ., 2001. 713 p.)

Статья поступила в редакцию 03.10.2024

## Информация об авторах

**ФОМИНА Екатерина Ильинична** — младший научный сотрудник. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101990, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский пер., д. 4, e-mail: 89150682218@mail.ru).

**ХУДОРОЖКО Михаил Викторович** — младший научный сотрудник. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский пер., д. 4); ассистент. МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: khudorozko.mixa@gmail.com).

**АЛИМОВ Мухамят Абдулхайумович** — старший научный сотрудник. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский пер., д. 4, e-mail: alimov\_mike@mail.ru).

**ДУМАНСКИЙ Александр Митрофанович** — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский пер., д. 4, e-mail: aldumans@mail.ru).

## Information about the authors

**FOMINA Ekaterina Ilyinichna** — Junior Researcher. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101000, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonievskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: 89150682218@mail.ru).

**KHUDOROZHKO Mikhail Viktorovich** — Junior Researcher. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101000, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonievskiy Pereulok, Bldg. 4); Assistant. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: khudorozko.mixa@gmail.com).

**ALIMOV Mukhamyat Abdulkhayumovich** — Senior Researcher. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101000, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonievskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: alimov\_mike@mail.ru).

**DUMANSKY Alexander Mitrofanovich** — Doctor of Science (Physics and Math), Chief Researcher. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101000, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonievskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: aldumans@mail.ru).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Фомина Е.И., Худорожко М.В., Алимов М.А., Думанский А.М. Методика построения нелинейного определяющего соотношения при малом числе циклов растяжения для однонаправленного углепластика с термопластичной матрицей. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 6, с. 3–11.

### Please cite this article in English as:

Fomina E.I., Khudorozhko M.V., Alimov M.A., Dumansky A.M. A method for constructing a nonlinear constitutive relation at the low number of the tensile cycles for the unidirectional CFRP with a thermoplastic matrix. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 6, pp. 3–11.