

# Машиностроение и машиноведение

УДК 621.01, 531.8, 531.1

## Решение обратной кинематической задачи шестиподвижного робота относительного манипулирования, состоящего из двух модулей параллельной структуры\*

К.С. Мухин, А.В. Антонов, А.С. Фомин

ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук

## Inverse kinematics of a 6-DOF hybrid robot including two parallel modules

K.S. Mukhin, A.V. Antonov, A.S. Fomin

Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences

Рассмотрен новый шестиподвижный робот относительного манипулирования (гибридного типа), который состоит из двух модулей параллельной структуры, размещенных один над другим. Верхний модуль робота представляет собой четырехподвижный механизм типа «Дельта», нижний — двухподвижный механизм с круговой направляющей. Предложенная конструкция обеспечивает роботу усовершенствованные кинематические характеристики, которых нельзя достичь при отдельном использовании верхнего или нижнего модуля. Разработан алгоритм решения обратной кинематической задачи, позволяющий вычислять перемещения в приводных звеньях для заданной относительной конфигурации модулей. Алгоритм включает в себя два этапа: определение конфигурации модулей относительно неподвижной системы координат и решение обратной кинематической задачи для каждого модуля по отдельности. Работоспособность предложенного алгоритма продемонстрирована на примере моделирования траектории движения верхнего модуля робота относительно нижнего.

EDN: JGQBVO, <https://elibrary/jgqbvo>

**Ключевые слова:** робот гибридной структуры, обратная кинематическая задача, четырехподвижный механизм типа «Дельта», механизм с круговой направляющей, моделирование траектории движения

The paper considers a new relative manipulation hybrid 6-DOF robot. It consists of two modules of the parallel design positioned one above the other. The robot upper module is a 4-DOF delta mechanism, and the lower one is the 2-DOF mechanism with a circular guide. The proposed design provides the robot with the improved kinematic characteristics, which could not be achieved with a separate use of the upper or lower modules. The paper propos-

\* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10304, <https://rscf.ru/project/22-79-10304/>.

es the developed algorithm for solving the inverse kinematics problem making it possible to compute displacements in the drive links for a given relative module configuration. The algorithm includes two steps: determining the module configuration relative to the fixed coordinate system and solving the inverse kinematics problem for each module separately. The proposed algorithm performance is demonstrated using the example of simulating the trajectory of the upper robot module relative to the lower one.

EDN: JQBVVO, <https://elibrary/jgqbvo>

**Keywords:** hybrid design robot, inverse kinematics problem, 4-DOF delta mechanism, circular guide mechanism, trajectory simulation

Увеличение сложности изготовления и обработки деталей требует применения современного механического оборудования. Во многих случаях инструменту необходимо обеспечить доступ с разных сторон и под разными углами к изготавливаемой или обрабатываемой детали, поэтому часто требуется наличие шести степеней свободы. Однако использование роботов, у которых выходное звено имеет шесть степеней свободы, не всегда является рациональным. Зачастую такие системы имеют сложную структуру, ограниченную жесткость и большие инерционные нагрузки, в том числе образующиеся за счет установки приводов на подвижных звеньях.

В связи с этим в машиностроении целесообразно применять механизмы гибридной структуры с относительным манипулированием, содержащие два модуля и более, звенья которых взаимодействуют друг с другом [1, 2]. Благодаря такому техническому решению повышается маневренность общей конструкции, увеличивается область возможных положений выходного звена и углов его наклона, а также становится шире ассортимент инструментов, устанавливаемых на выходном звене.

В машиностроении, в частности в станочном оборудовании, наибольшее распространение получили механизмы гибридной структуры, состоящие из двух модулей [3–6]. Они также находят применение в аддитивных технологиях [7]. Эти модули могут располагаться в пространстве относительно друг друга различным образом. В большинстве таких систем модули размещены друг над другом в вертикальной плоскости, один из них принимается верхним, другой — нижним.

Одним из возможных вариантов комбинаций модулей механизмов гибридного типа является такой, в котором оба модуля имеют параллельную структуру. При этом каждый из них может иметь несколько степеней свободы [8]. Комбинации таких модулей с двумя, тремя и четырьмя

степенями свободы могут обеспечить взаимодействие детали и инструмента с использованием полного набора из шести степеней свободы. Применение комбинаций таких механизмов может увеличить жесткость, надежность, точность и скорость работы устройства в целом, а также реализовать такие важные технологические операции, как механическая обработка и изготовление сложных деталей за один установ, контроль геометрических параметров деталей сложной формы или создание деталей методом аддитивного производства.

Возможны различные комбинации степеней свободы верхнего и нижнего модулей. Однако следует отметить, что верхнему модулю целесообразно обеспечить большее число степеней свободы, так как на нем расположен исполнительный инструмент.

Цель работы — разработка конструкции шестиподвижного робота относительного манипулирования на основе механизмов параллельной структуры и решение обратной кинематической задачи (ОКЗ) данного робота.

**Конструкция шестиподвижного робота относительного манипулирования.** Рассмотрим случай, когда верхний модуль имеет четыре степени свободы по типу движения Шенфлиса [9, 10], а нижний — две вращательные степени свободы. Чтобы обеспечить верхнему модулю заданные степени свободы, будем использовать недавно разработанный дельта-робот с линейными приводами [11]. Это обусловлено тем, что роботы данного типа хорошо зарекомендовали себя в промышленности. Кроме того, не до конца изучено применение дельта-роботов в системах относительного манипулирования, хотя внедрение четырехподвижных механизмов совместно с двухподвижными является весьма перспективным решением для проведения различных технологических операций, в том числе связанных с обработкой деталей машин сложной формы.

В качестве нижнего модуля принимаем двухподвижный механизм с круговой направляющей [12]. Его использование позволяет значительно расширить функциональные возможности верхнего модуля благодаря дополнительным углам наклона и неограниченному углу поворота вокруг оси, перпендикулярной плоскости круговой направляющей.

Сборочная компьютерная модель (виртуальный прототип) предлагаемого шестиподвижного робота гибридной структуры показана на рис. 1. Нижний модуль, установленный на неподвижном основании 1, включает в себя две периферийные цепи, расположенные по бокам, и одну центральную цепь. Каждая из периферийных цепей опирается на круговую направляющую 2 с внутренним зубчатым зацеплением и состоит из каретки 5, имеющей прижимные ролики 3 и приводное зубчатое колесо 4, на котором размещен двигатель Д1.

Двигатель Д1 смонтирован с внутренней стороны круговой направляющей 2 для уменьшения габаритных размеров механизма. На каретке жестко установлена вилка 5', которая через карданную крестовину 6 соединена с шатуном 7, где подвижно установлена штанга 8 с жестко закрепленной на ней вилкой 8'. Послед-

няя связана с нижней платформой 12 (выходным звеном механизма нижнего модуля) через крестовину 9 и вилку выходного звена 12'.

Центральная цепь содержит колонну 10, жестко установленную на неподвижном основании, и рычаг 11, шарнирно сопряженный с нижней платформой. Центральная цепь накладывает четыре ограничения на движение нижней платформы, позволяя ей совершать поворот вокруг продольной оси колонны 10 и наклоняться вокруг перпендикулярной ей оси. Таким образом, нижний модуль имеет две степени свободы.

На неподвижном основании установлены колонны из конструкционного профиля 13, где закреплены направляющие 14, по которым перемещаются каретки 15. На каждой паре кареток жестко закреплена пластина суппорта 18, поступательное движение которой обеспечивает шариковинтовая передача через винт 16 и гайку 17. Привод винтов осуществляют двигатели Д2.

Верхняя платформа 20 (выходное звено механизма верхнего модуля) связана с пластиной суппорта штангами 19, которые сопряжены с выходным звеном и суппортами посредством сферических шарниров. На боковых колоннах

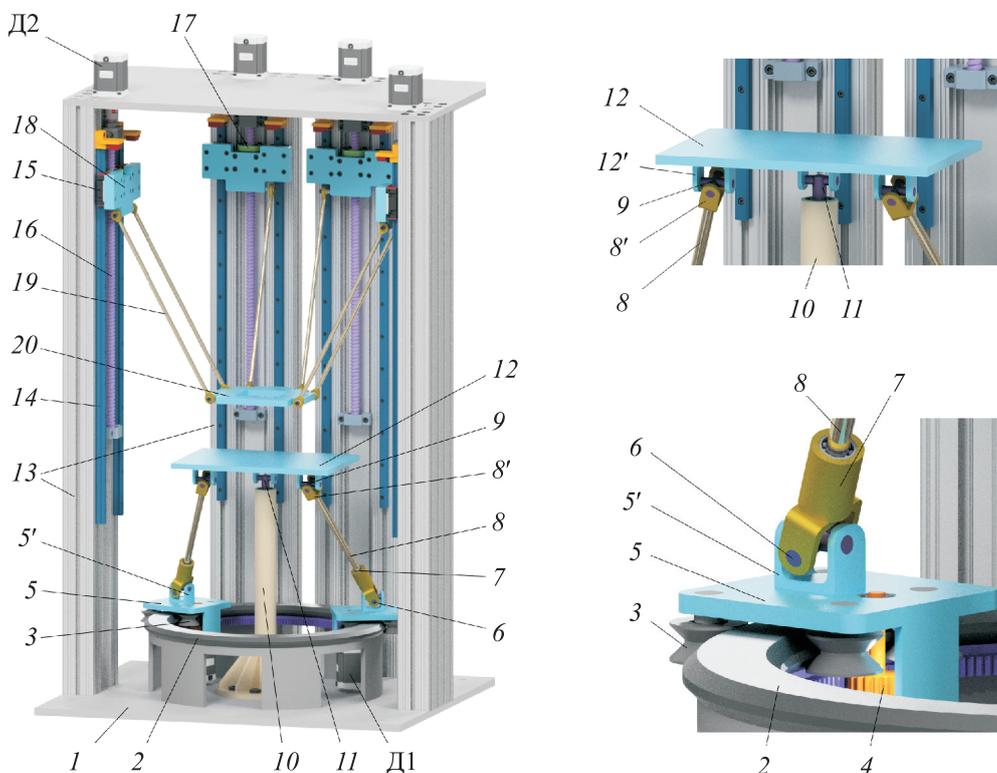


Рис. 1. Сборочная компьютерная модель шестиподвижного робота гибридной структуры с двумя модулями параллельной структуры

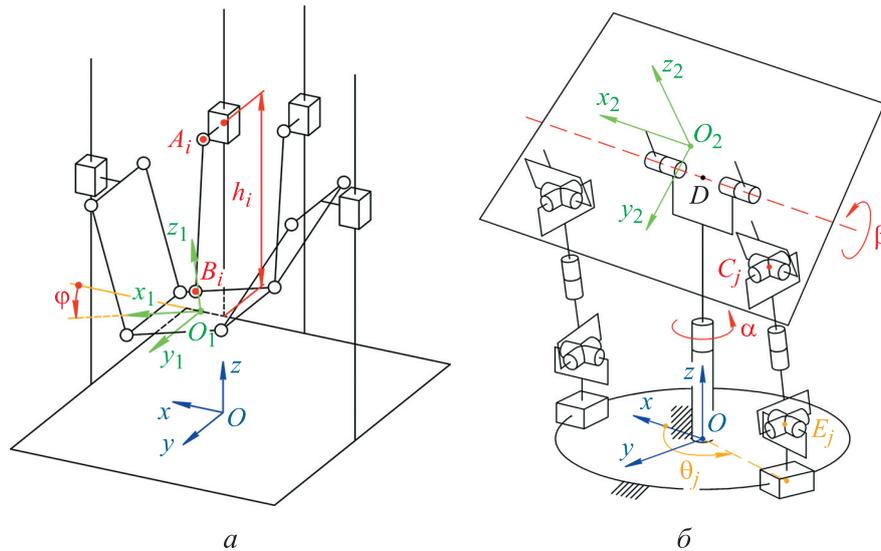


Рис. 2. Верхний (а) и нижний (б) модули шестиподвижного робота гибридной структуры и связанные с ними системы координат

к пластине суппорта прикреплены две штанги. На задних колоннах к каждой пластине суппорта присоединена лишь одна штанга для обеспечения механизму верхнего модуля четырех степеней свободы.

Таким образом, робот имеет шесть приводных звеньев, контролирующих шесть степеней свободы в относительном манипулировании. Управлением перемещениями этих звеньев контролируется движение нижней платформы по двум степеням свободы и верхней платформы по четырём степеням свободы. Рассмотрим алгоритм расчета этих перемещений для заданной относительной конфигурации обоих модулей.

**Алгоритм решения ОКЗ.** Решение ОКЗ состоит в определении координат приводных звеньев исследуемого механизма в зависимости от положения и ориентации платформ нижнего и верхнего модулей. Координаты приводных звеньев верхнего модуля представляют собой четыре линейных перемещения суппортов  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  (рис. 2, а), а координаты приводных звеньев нижнего модуля — два угловых перемещения кареток  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2$  (рис. 2, б).

Для описания относительной конфигурации модулей введем три системы координат. Пусть у неподвижной системы координат ось  $Oz$  совпадает с осью круговой направляющей, а ось  $Ox$  направлена к левой вертикальной колонне (см. рис. 2, а). Связанная с верхней платформой подвижная система координат  $O_1x_1y_1z_1$  имеет

ту же ориентацию, что и неподвижная система  $Oxyz$ , когда верхняя платформа находится в горизонтальном положении. Свяжем систему координат  $O_2x_2y_2z_2$  с нижней платформой аналогичным образом.

Конфигурацию модулей относительно друг друга зададим с помощью матрицы, определяющей положение системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  относительно системы координат  $O_2x_2y_2z_2$ :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{R}$  — матрица поворота, определяющая ориентацию системы  $O_1x_1y_1z_1$  относительно системы  $O_2x_2y_2z_2$ ;  $\mathbf{p}$  — вектор положения точки  $O_1$  относительно системы координат  $O_2x_2y_2z_2$ .

Будем считать, что матрица  $\mathbf{T}$  известна при решении ОКЗ.

Алгоритм решения ОКЗ состоит в следующем. Пусть  $\mathbf{T}_1$  и  $\mathbf{T}_2$  — две матрицы перехода, описывающие конфигурации подвижных систем координат  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$  относительно неподвижной системы координат  $Oxyz$ . Эти матрицы связаны уравнением

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}. \quad (2)$$

Верхняя платформа (см. рис. 2, а) имеет четыре степени свободы относительно основания: три поступательные и одну вращательную вокруг оси  $Oy$ . Следовательно, матрица перехода, описывающая конфигурацию системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ , имеет вид [11]

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) & x_{O1} \\ 0 & 1 & 0 & y_{O1} \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & z_{O1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $\varphi$  — угол поворота верхней платформы вокруг оси  $Oy$ ;  $x_{O1}$ ,  $y_{O1}$  и  $z_{O1}$  — координаты точки  $O_1$  в системе координат  $Oxyz$ .

Матрицу перехода, описывающую конфигурацию системы координат  $O_2x_2y_2z_2$ , представим следующим образом:

$$T_2 = T_{21}T_{22}T_{23}T_{24}, \quad (4)$$

где  $T_{21}$  — матрица, определяющая перемещение из точки  $O$  в точку  $D$  на расстояние  $l_{OD}$  вдоль оси  $Oz$ ;  $T_{22}$  — матрица, определяющая вращение вокруг оси  $Oz$  на угол  $\alpha$ ;  $T_{23}$  — матрица, определяющая вращение вокруг повернутой оси  $Ox$  на угол  $\beta$ ;  $T_{24}$  — матрица, определяющая перемещение из точки  $D$  в точку  $O_2$  на расстояние  $l_{DO_2}$  вдоль повернутой оси  $Oz$ .

Матрицы  $T_{21}$  и  $T_{24}$  являются постоянными и зависят от геометрических параметров рассматриваемого робота.

Подставляя уравнения (1), (3) и (4) в выражение (2) и приравнявая независимые компоненты полученного матричного уравнения, получаем систему из шести уравнений относительно шести неизвестных:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varphi$ ,  $x_{O1}$ ,  $y_{O1}$  и  $z_{O1}$ . Символьные вычисления показывают, что удобнее оперировать следующим матричным уравнением вместо уравнения (2):

$$T_1 T^{-1} = T_2, \text{ где } T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Рассматривая вторую строку и первый столбец матричного уравнения (5), получаем простое уравнение для вычисления угла  $\alpha$

$$\sin(\alpha) = r_{12}, \quad (6)$$

где  $r_{12}$  — соответствующий компонент матрицы  $R$ .

Рассмотрим два уравнения, полученные из первой и третьей строк и первого столбца матричного уравнения (5):

$$\begin{aligned} r_{11} \cos(\varphi) + r_{13} \sin(\varphi) &= \cos \alpha; \\ r_{13} \cos(\varphi) - r_{11} \sin(\varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $r_{11}$  и  $r_{13}$  — соответствующие компоненты матрицы  $R$ .

Выражения (7) представляют собой систему линейных уравнений относительно переменных  $\cos(\varphi)$  и  $\sin(\varphi)$ . Можно решить эту си-

стему и найти единственное значение угла  $\varphi$ , используя функцию  $\text{atan2}$ . Затем можно рассмотреть два уравнения, соответствующих первой и третьей строкам и третьему столбцу матричного уравнения (2). Эти уравнения аналогичны уравнениям (7) и представляют собой систему линейных уравнений для вычисления угла  $\beta$ . Далее определяем оставшиеся переменные  $x_{O1}$ ,  $y_{O1}$  и  $z_{O1}$  из последнего столбца матричного уравнения (2).

Так как уравнение (6) дает два решения для угла  $\alpha$ , получаем два набора решений для всех шести переменных и выбираем решение, при котором обе платформы не перевернуты.

Полученные переменные позволяют вычислить матрицы  $T_1$  и  $T_2$ , которые определяют конфигурации обоих модулей относительно неподвижной системы координат  $Oxyz$ . Далее можно продолжить решение ОКЗ для каждого модуля независимо.

Следуя алгоритму из работы [11], вычисляем линейные перемещения суппортов верхнего модуля (см. рис. 2, а)

$$\begin{aligned} h_i &= \sqrt{l_{AiBi}^2 - (x_{Bi} - x_{Ai})^2 - (y_{Bi} - y_{Ai})^2} + z_{Bi}, \\ i &= 1, \dots, 4, \end{aligned}$$

где  $l_{AiBi}$  — длина штанги  $A_iB_i$ ;  $x_{Ai}$ ,  $x_{Bi}$ ,  $y_{Ai}$ ,  $y_{Bi}$  и  $z_{Bi}$  — координаты соответствующих точек в неподвижной системе координат  $Oxyz$ .

Параметры  $l_{AiBi}$ ,  $x_{Ai}$  и  $y_{Ai}$  являются постоянными и определяются геометрическими параметрами робота. Параметры  $x_{Bi}$ ,  $y_{Bi}$  и  $z_{Bi}$  находим из выражения

$$\begin{bmatrix} x_{Bi} \\ y_{Bi} \\ z_{Bi} \\ 1 \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} x'_{Bi} \\ y'_{Bi} \\ z'_{Bi} \\ 1 \end{bmatrix},$$

где  $x'_{Bi}$ ,  $y'_{Bi}$ ,  $z'_{Bi}$  — координаты точки  $B_i$  в системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ , определяемые геометрическими параметрами механизма верхнего модуля.

Для нижнего модуля будем использовать решение, схожее с предложенным в работе [13], и определим угловые перемещения кареток  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2$ , из уравнения

$$(p_{Ej} - p_{Cj})^2 = l_{CjEj}^2, \quad (8)$$

где  $p_{Ej} = [R \cos(\theta_j) \ R \sin(\theta_j) \ z_{Ej}]^T$  — координаты точки  $E_j$  в системе  $Oxyz$ ;  $R$  — радиус круговой направляющей нижнего модуля;  $z_{Ej}$  — координата  $z$  точки  $E_j$  в системе  $Oxyz$ ;  $p_{Cj}$  —

координаты точки  $C_j$  в системе  $Oxyz$ ;  $L_{CjEj}$  — постоянное расстояние между точками  $C_j$  и  $E_j$ .

Для нахождения вектора  $\mathbf{p}_{Cj}$  будем использовать соотношение

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{Cj} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2 \begin{bmatrix} x'_{Cj} \\ y'_{Cj} \\ z'_{Cj} \\ 1 \end{bmatrix},$$

где  $x'_{Cj}$ ,  $y'_{Cj}$ ,  $z'_{Cj}$  — координаты точки  $C_j$  в системе координат  $O_2x_2y_2z_2$ , определяемые геометрическими параметрами механизма нижнего модуля.

Преобразуем уравнение (8) следующим образом:

$$c_1 \cos(\theta_j) + c_2 \sin(\theta_j) + c_3 = 0,$$

где  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  — константы.

Тогда угловые перемещения кареток можно найти по приведенной в работе [14] формуле

$$\theta_j = 2 \arctg \left( \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_3^2 + c_1^2}}{c_1 - c_3} \right).$$

Из возможных комбинаций решений  $\theta_j$  для  $\theta_1$  и  $\theta_2$  определяем тот набор координат, при котором каретки не наезжают друг на друга.

Таким образом, получено решение ОКЗ для шестиподвижного робота гибридной структуры. Применим разработанный алгоритм и рассмотрим численный пример.

**Численный пример.** Робот, соответствующий компьютерной модели (см. рис. 1), имеет следующие геометрические параметры, м:  $x_{A1} = 0,15$ ;  $y_{A1} = 0$ ;  $x_{A2} = 0,04$ ;  $y_{A2} = -0,19$ ;  $x_{A3} = -0,04$ ;  $y_{A3} = -0,19$ ;  $x_{A4} = -0,15$ ;  $y_{A4} = 0$ ;  $x'_{B1} = 0,08$ ;  $y'_{B1} = 0$ ;  $x'_{B2} = 0,04$ ;  $y'_{B2} = -0,04$ ;  $x'_{B3} = -0,04$ ;  $y'_{B3} = -0,04$ ;  $y'_{B4} = 0$ ;  $z'_{B1} = \dots = z'_{B4} = 0,05$ ;  $x'_{C1} = 0,08$ ;  $y'_{C1} = 0,03$ ;  $x'_{C2} = -0,08$ ;  $y'_{C2} = 0,03$ ;  $z'_{C1} = z'_{C2} = -0,01$ ;  $l_{A1B1} = \dots = l_{A4B4} = 0,30$ ;  $l_{OD} = 0,13$ ;  $l_{DO2} = 0,04$ ;  $l_{C1E1} = l_{C2E2} = 0,20$ ;  $R = 0,15$ ;  $z_{E1} = z_{E2} = 0,03$ .

Предположим, что верхняя платформа должна смещаться по пространственной траектории относительно нижней. Такая траектория показана на рис. 3, где красно-зелено-синие тройки линий указывают ориентацию системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  относительно системы координат  $O_2x_2y_2z_2$  вдоль траектории.

Траектория включает в себя три сегмента, расположенных на сфере радиусом 0,05 м с центром в точке  $O_2$ . Первый и третий сегменты представляют собой дуги параллелей, которые

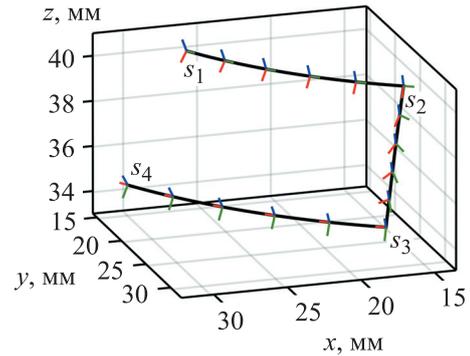


Рис. 3. Пространственная траектория относительного движения двух модулей

лежат между двумя плоскостями, проходящими через ось  $O_2z_2$ , и образуют углы  $30^\circ$  и  $60^\circ$  с плоскостью  $O_2x_2z_2$ . Первая дуга находится на высоте 0,04 м над плоскостью  $O_2x_2y_2$ , вторая — на высоте 0,035 м над той же плоскостью. Второй сегмент представляет собой меридиан, соединяющий эти дуги.

По всей траектории ось  $O_1z_1$  проходит через точку  $O_2$ , т. е. верхняя платформа остается касательной к сфере. В первом сегменте ось  $O_1y_1$  касается первой дуги (см. рис. 3, зеленая линия); в третьем сегменте ось  $O_1x_1$  касается третьей дуги (красная линия). Относительная ориентация двух модулей меняется вдоль второго сегмента, как показано на рис. 3. В этом сегменте плоскость  $O_1x_1y_1$  касается сферы.

Для моделирования траектории введем безразмерный параметр пути  $s$ , который принимает значения  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 100$ ,  $s_3 = 200$  и  $s_4 = 300$  на концах сегментов. Каждое значение этого параметра определяет уникальную точку траектории.

Результаты решения ОКЗ, полученные в программе MathCAD с использованием предложенного алгоритма, приведены на рис. 4. Параметр пути  $s$  варьировался с единичным шагом. Видно, что верхний модуль остается неподвижным во время первого сегмента траектории: параметры  $h_1, \dots, h_4$  сохраняют постоянные значения. Во втором и третьем сегментах двигаются оба модуля.

**Обсуждение результатов.** Хотя ОКЗ имеет относительно простое решение в аналитическом виде, следует упомянуть некоторые особенности. Если угол  $\alpha = \pm 90^\circ$ , то невозможно использовать уравнение (7) для вычисления угла  $\varphi$ : система линейных уравнений имеет бесконечное количество решений. Этот случай соответствует особому положению робота [15].

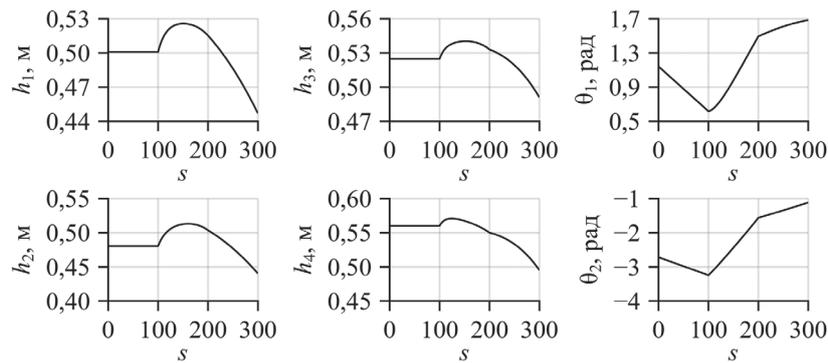


Рис. 4. Результаты решения ОКЗ

В такой конфигурации оси наклона верхней и нижней платформ становятся параллельными, и робот теряет одну степень подвижности в относительном движении. Существует бесконечное количество комбинаций углов наклона  $\varphi$  и  $\beta$  для одной и той же относительной конфигурации модулей.

На практике траекторию следует планировать так, чтобы обойти это особое положение. В численном примере оно исключено путем ограничения угла поворота нижнего модуля от  $30^\circ$  до  $60^\circ$ . Можно расширить этот диапазон, но необходимо иметь в виду, что рабочие характеристики робота могут ухудшиться при приближении к особому положению. Изучение этой проблемы выходит за рамки текущего исследования и может быть предметом будущих исследований.

## Выводы

1. Рассмотрена конструкция и представлено решение ОКЗ робота гибридной структуры, состоящего из двух модулей и имеющего шесть степеней свободы в относительном движении. Верхний модуль представляет собой четырехподвижный механизм типа «Дельта», нижний модуль — двухподвижный механизм с криво-

вой направляющей. Возможны и альтернативные комбинации таких модулей, обеспечивающие схожие структурно-кинематические параметры. В этом случае предложенный кинематический алгоритм можно адаптировать для других роботов гибридной структуры.

2. ОКЗ имеет решение в аналитическом виде. Так как желаемое движение модулей задано относительно друг друга, необходимым является составление и решение матричного уравнения, которое связывает относительное движение модулей с их абсолютным движением в неподвижной системе координат. После этого становится возможным решение ОКЗ обычным способом. Работоспособность алгоритма продемонстрирована на численном примере с моделированием заданного движения, не попадающего в особое положение, которое возникает, когда оси наклона обеих подвижных платформ становятся параллельными.

3. Предложенный алгоритм решения ОКЗ становится нереализуемым, когда рассмотренный робот попадает в особое положение. Поэтому его необходимо модифицировать так, чтобы преодолеть эту проблему. Изучение этого и других особых положений и планирование траекторий, которые обходят особые положения, является предметом будущих исследований.

## Литература

- [1] Глазунов В.А., Ласточкин А.Б., Шалюхин К.А. и др. К анализу и классификации устройств относительного манипулирования. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2009, № 4, с. 81–85.
- [2] Wu Y., Wang H., Li Z. Quotient kinematics machines: concept, analysis, and synthesis. *J. Mech. Robot.*, 2011, vol. 3, no. 4, art. 041004, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4004891>
- [3] Khoi P.B., Toan N.V. A control solution for closed-form mechanisms of relative manipulation based on fuzzy approach. *Int. J. Adv. Robot. Syst.*, 2019, vol. 16, no. 2, doi: <https://doi.org/10.1177/1729881419839810>
- [4] López-Estrada L., Fajardo-Pruna M., Sánchez-González L. et al. Design and implementation of a stereo vision system on an innovative 6DOF single-edge machining device for tool tip

- localization and path correction. *Sensors*, 2018, vol. 18, no. 9, art. 3132, doi: <https://doi.org/10.3390/s18093132>
- [5] Bi W., Xie F., Liu X.-J. et al. Optimal design of a novel 4-degree-of-freedom parallel mechanism with flexible orientation capability. *Proc. Inst. Mech. Eng. B*, 2019, vol. 233, no. 2, pp. 632–642, doi: <https://doi.org/10.1177/0954405417731469>
- [6] Li Q., Wu W., Xiang J. et al. A hybrid robot for friction stir welding. *Proc. Inst. Mech. Eng. C*, 2015, vol. 229, no. 14, pp. 2639–2650, doi: <https://doi.org/10.1177/0954406214562848>
- [7] Isa M.A., Lazoglu I. Five-axis additive manufacturing of freeform models through buildup of transition layers. *J. Manuf. Syst.*, 2019, vol. 50, pp. 69–80, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2018.12.002>
- [8] Carbonari L., Callegari M., Palmieri G. et al. A new class of reconfigurable parallel kinematic machines. *Mech. Mach. Theory*, 2014, vol. 79, pp. 173–183, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.04.011>
- [9] Schreiber L.-T., Gosselin C. Schönflies motion parallel robot (SPARA): a kinematically redundant parallel robot with unlimited rotation capabilities. *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, 2019, vol. 24, no. 5, pp. 2273–2281, doi: <https://doi.org/10.1109/TMECH.2019.2929646>
- [10] Carricato M. Fully isotropic four-degrees-of-freedom parallel mechanisms for Schoenflies motion. *Int. J. Robot. Res.*, 2005, vol. 24, no. 5, pp. 397–414, doi: <https://doi.org/10.1177/0278364905053688>
- [11] Laryushkin P., Fomin A., Antonov A. Kinematic and singularity analysis of a 4-DOF Delta-type parallel robot. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2023, vol. 45, no. 4, art. 218, doi: <https://doi.org/10.1007/s40430-023-04128-7>
- [12] He S., Duan X., Qu X. et al. Kinematic modeling and motion control of a parallel robotic antenna pedestal. *Robotica*, 2023, vol. 41, no. 11, pp. 3275–3295, doi: <https://doi.org/10.1017/S0263574723000917>
- [13] Laryushkin P., Antonov A., Fomin A. et al. Inverse and forward kinematics of a reconfigurable spherical parallel mechanism with a circular rail. In: ROMANSY 24 — robot design, dynamics and control. *Springer*, 2022, pp. 246–254, doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-06409-8\\_26](https://doi.org/10.1007/978-3-031-06409-8_26)
- [14] Waldron K., Schmiedeler J. Kinematics. In: Springer handbook of robotics. *Springer*, 2016, pp. 11–36, doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-32552-1\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-32552-1_2) [15] Müller A., Zlatanov D., eds. Singular configurations of mechanisms and manipulators. *Springer*, 2019. 229 p., doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-05219-5>
- [15] Müller A., Zlatanov D., eds. Singular configurations of mechanisms and manipulators. *Springer*, 2019. 229 p., doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-05219-5>

## References

- [1] Glazunov V.A., Lastochkin A.B., Shalyukhin K.A. et al. Analysis and classification of relative manipulation devices. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2009, no. 4, pp. 81–85. (In Russ.). (Eng. version: *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2009, vol. 38, no. 4, pp. 379–382, doi: <https://doi.org/10.3103/S1052618809040141>)
- [2] Wu Y., Wang H., Li Z. Quotient kinematics machines: concept, analysis, and synthesis. *J. Mech. Robot.*, 2011, vol. 3, no. 4, art. 041004, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4004891>
- [3] Khoi P.B., Toan N.V. A control solution for closed-form mechanisms of relative manipulation based on fuzzy approach. *Int. J. Adv. Robot. Syst.*, 2019, vol. 16, no. 2, doi: <https://doi.org/10.1177/1729881419839810>
- [4] López-Estrada L., Fajardo-Pruna M., Sánchez-González L. et al. Design and implementation of a stereo vision system on an innovative 6DOF single-edge machining device for tool tip localization and path correction. *Sensors*, 2018, vol. 18, no. 9, art. 3132, doi: <https://doi.org/10.3390/s18093132>
- [5] Bi W., Xie F., Liu X.-J. et al. Optimal design of a novel 4-degree-of-freedom parallel mechanism with flexible orientation capability. *Proc. Inst. Mech. Eng. B*, 2019, vol. 233, no. 2, pp. 632–642, doi: <https://doi.org/10.1177/0954405417731469>
- [6] Li Q., Wu W., Xiang J. et al. A hybrid robot for friction stir welding. *Proc. Inst. Mech. Eng. C*, 2015, vol. 229, no. 14, pp. 2639–2650, doi: <https://doi.org/10.1177/0954406214562848>

- [7] Isa M.A., Lazoglu I. Five-axis additive manufacturing of freeform models through buildup of transition layers. *J. Manuf. Syst.*, 2019, vol. 50, pp. 69–80, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2018.12.002>
- [8] Carbonari L., Callegari M., Palmieri G. et al. A new class of reconfigurable parallel kinematic machines. *Mech. Mach. Theory*, 2014, vol. 79, pp. 173–183, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.04.011>
- [9] Schreiber L.-T., Gosselin C. Schönflies motion parallel robot (SPARA): a kinematically redundant parallel robot with unlimited rotation capabilities. *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, 2019, vol. 24, no. 5, pp. 2273–2281, doi: <https://doi.org/10.1109/TMECH.2019.2929646>
- [10] Carricato M. Fully isotropic four-degrees-of-freedom parallel mechanisms for Schoenflies motion. *Int. J. Robot. Res.*, 2005, vol. 24, no. 5, pp. 397–414, doi: <https://doi.org/10.1177/0278364905053688>
- [11] Laryushkin P., Fomin A., Antonov A. Kinematic and singularity analysis of a 4-DOF Delta-type parallel robot. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2023, vol. 45, no. 4, art. 218, doi: <https://doi.org/10.1007/s40430-023-04128-7>
- [12] He S., Duan X., Qu X. et al. Kinematic modeling and motion control of a parallel robotic antenna pedestal. *Robotica*, 2023, vol. 41, no. 11, pp. 3275–3295, doi: <https://doi.org/10.1017/S0263574723000917>
- [13] Laryushkin P., Antonov A., Fomin A. et al. Inverse and forward kinematics of a reconfigurable spherical parallel mechanism with a circular rail. In: ROMANSY 24 — robot design, dynamics and control. *Springer*, 2022, pp. 246–254, doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-06409-8\\_26](https://doi.org/10.1007/978-3-031-06409-8_26)
- [14] Waldron K., Schmiedeler J. Kinematics. In: Springer handbook of robotics. *Springer*, 2016, pp. 11–36, doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-32552-1\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-32552-1_2)
- [15] Müller A., Zlatanov D., eds. Singular configurations of mechanisms and manipulators. *Springer*, 2019. 229 p., doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-05219-5>

Статья поступила в редакцию 01.11.2024

## Информация об авторах

**МУХИН Кирилл Сергеевич** — аспирант. ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский переулок, д. 4, e-mail: [ksmukhin@yandex.ru](mailto:ksmukhin@yandex.ru)).

**АНТОНОВ Антон Вадимович** — кандидат технических наук, старший научный сотрудник. ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский переулок, д. 4, e-mail: [antonov.av@imash.ru](mailto:antonov.av@imash.ru)).

**ФОМИН Алексей Сергеевич** — кандидат технических наук, старший научный сотрудник. ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский переулок, д. 4, e-mail: [alexey-nvkz@mail.ru](mailto:alexey-nvkz@mail.ru)).

## Information about the authors

**MUKHIN Kirill Sergeevich** — Postgraduate. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101000, Moscow, Russian Federation, M. Kharitonyevskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: [ksv01@mail.ru](mailto:ksv01@mail.ru)).

**ANTONOV Anton Vadimovich** — Candidate of Science (Eng.), Senior Researcher. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101000, Moscow, Russian Federation, M. Kharitonyevskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: [antonov.av@imash.ru](mailto:antonov.av@imash.ru)).

**FOMIN Alexey Sergeevich** — Candidate of Science (Eng.), Senior Researcher. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101000, Moscow, Russian Federation, M. Kharitonyevskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: [alexey-nvkz@mail.ru](mailto:alexey-nvkz@mail.ru)).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Мухин К.С., Антонов А.В., Фомин А.С. Решение обратной кинематической задачи шестиподвижного робота относительного манипулирования, состоящего из двух модулей параллельной структуры. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 8, с. 3–11.

### Please cite this article in English as:

Mukhin K.S., Antonov A.V., Fomin A.S. Inverse kinematics of a 6-DOF hybrid robot including two parallel modules. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 8, pp. 3–11.