

УДК 621.6-1/-9, 621.643.02, 621.515.1

## Сопоставление подходов к решению задачи течения идеального газа в криволинейном канале в двухмерной постановке

Д.А. Калашников<sup>1,2</sup>, Ю.А. Борисов<sup>1,2</sup>, А.В. Чернышев<sup>1</sup><sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана<sup>2</sup> ФГБУН «Объединенный институт высоких температур РАН»

## Comparing approaches to solving the problem of the ideal gas flow in a curved channel in the two-dimensional setting

D.A. Kalashnikov<sup>1,2</sup>, Yu.A. Borisov<sup>1,2</sup>, A.V. Chernyshev<sup>1</sup><sup>1</sup> Bauman Moscow State Technical University<sup>2</sup> Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences

Рассмотрены и сопоставлены упрощенные подходы к определению параметров потока газа при течении в криволинейном канале постоянного сечения. В рамках каждого подхода выполнен расчет параметров газа для шести каналов с различными радиусами и углами поворота. Полученные результаты сопоставлены с данными эталонного расчета, проведенного с помощью средств вычислительной газовой динамики. Проведена проверка применимости наиболее адекватного подхода к оценке параметров течения газа в сужающемся криволинейном канале. Даны заключения по применимости каждого из рассмотренных подходов.

EDN: YIUWYM, <https://elibrary/yiuwym>

**Ключевые слова:** криволинейный канал, идеальный газ, газовая динамика, инженерный метод, уравнение Навье — Стокса

The paper considers and compares simplified approaches to a problem of determining the gas flow parameters in a curved channel with the constant cross-section. Gas parameters are computed for six channels with the different radii and rotation angles within the framework of each approach. The obtained results are compared with the reference computation data received using the computational gas dynamics. Applicability of the most adequate approach to assessing the gas flow parameters in the narrowing curved channel is checked. The paper provides conclusions on applicability of each of the considered approaches.

EDN: YIUWYM, <https://elibrary/yiuwym>

**Keywords:** curved channel, ideal gas, gas dynamics, engineering method, Navier-Stokes equation

Многие задачи прикладной газовой динамики, от течения среды в трубопроводах до профилирования проточной части турбомашин, можно свести к определению параметров газа при прохождении криволинейного канала [1, 2]. В настоящее время трехмерная вычислительная

газовая динамика достигла высокого уровня развития, при котором различие между расчетными данными и действительными параметрами течения среды, полученными путем эксперимента [3], может составлять не более 5 % [4, 5].

Проблема заключается в сложности экспорта громоздких расчетных модулей в программах, моделирующих течение газа, в конкретные инженерные задачи и методы, подразумевающие решение обратной задачи газовой динамики или вариантный расчет [6–8].

Цель работы — сопоставление различных подходов к упрощенной оценке параметров газа, протекающего в криволинейном канале, удобных к реализации в составе инженерного метода профилирования каналов сложной формы.

Под упрощенной оценкой параметров газа в криволинейном канале подразумеваются определение значений давления, скорости течения и плотности газа в контрольных сечениях у выпуклой и вогнутой стенок канала.

В качестве наиболее удобных к реализации в составе инженерного метода выбраны следующие четыре подхода: равновесие единицы массы газа в поле действия сил поперек канала; уравнение импульсов; вывод выражения для давления газа на стенку из уравнения молекулярно-кинетической теории; анализ роста давления газа вследствие торможения нормальной составляющей скорости течения потока газа. Сопоставление подходов выполнено на примере течения газа в прямоугольных каналах постоянного сечения, различающихся высотой, радиусами и углами поворота потока.

В качестве исходных данных приняты следующие параметры газа: удельная газовая постоянная  $R = 287$  Дж/(кг·К); показатель адиабаты  $k = 1,4$ ; статическое давление  $p_0 = 101\,325$  Па; полная температура на входе в криволинейный канал  $T_0^* = 293$  К; скорость течения газа на входе в криволинейный канал  $c = 100$  м/с.

После подстановки исходных данных в систему уравнений

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \left( \frac{p_0}{p_0^*} \right)^{\frac{k-1}{k}};$$

$$\rho_0 = \frac{p_0}{T_0 R};$$

$$p_0^* = p_0 + \frac{\rho_0 c^2}{2}$$

получены следующие параметры: полное давление газа  $p_0^* = 107\,452$  Па, его плотность  $\rho_0 = 1,225$  кг/м<sup>3</sup> и статическая температура  $T_0 = 288,1$  К на входе в криволинейный канал.

Приняты следующие основные допущения:

- газ — идеальный;

- процессы в проточной части — квазистационарные, происходящие без внешнего теплообмена по адиабатному закону;

- поток — невязкий и потенциальный, следовательно, полная механическая энергия газовых частиц одинаковая во всем объеме;

- влияние гравитационных и электромагнитных сил, действующих на единицу массы газа, — несущественное [9, 10];

- стенки каналов — гладкие;

- пристеночные явления и пограничные слои не влияют на стенки канала.

**Равновесие единицы массы газа в поле действия сил.** Самым популярным подходом к расчету течения газа в криволинейном канале является анализ сил, действующих в поперечном направлении на единицу массы газа [11–13]. При криволинейном движении единица массы газа испытывает действие центробежной силы  $F_{цб}$ . В невязком потоке это действие центробежной силы уравновешивается внешней силой  $F_d$ , возникающей из-за разности давлений на гранях единицы массы, нормальных поперечной оси канала (рис. 1). Следовательно, приравняв эти силы, можно найти перепад давления, действующий на единицу массы газа.

Для инженерного расчета канал разбивают по высоте на несколько число участков, определяют массу каждого элементарного объема газа  $dm$  и рассчитывают центробежные силы, действующие на каждый из этих объемов (рис. 2):

$$dF_{цб} = dm \frac{c^2}{r}; \quad dm = \rho dn ds da;$$

$$dF_d = dp f_{гр.э.о}; \quad f_{гр.э.о} = ds da;$$

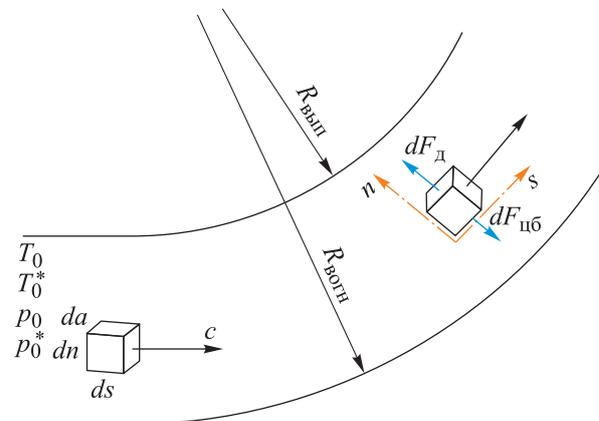


Рис. 1. Схема действия сил на единицу массы газа при течении в криволинейном канале

$$dF_{цб} = dF_d;$$

$$dp = dn \frac{\rho c^2}{r},$$

где  $r$  — радиус кривизны траектории, по которой движется элементарный объем газа;  $dn$ ,  $ds$  и  $da$  — высота, ширина и глубина ячейка элементарного объема газа соответственно;  $f_{гр.э.о}$  — площадь грани элементарного объема газа;  $dp$  — перепад давления, действующего на грань элементарного объема газа.

Для упрощения поток газа в канале разобьем на три элементарных объема: на выпуклой стороне, в середине и на вогнутой стороне. Воздействие центробежной силы на объем на выпуклой стороне канала компенсируется давлением на объем в середине канала, который, в свою очередь, действует на объем газа на вогнутой стенке канала. Объем на вогнутой стенке оказывает давление на стенку канала, значение которого для сохранения условия потенциальности определяет плотность и скорость течения газа у этой стенки.

Воздействие каждого объема от выпуклой стенки до вогнутой имеет кумулятивный эффект, т. е. накапливается при пересчете от одного элементарного объема к другому. Чтобы повысить точность расчета, можно разбить поток на большее число элементарных объемов по высоте канала.

Можно записать следующее:

$$\Delta p = \Delta n \frac{\rho c^2}{r};$$

$$\Delta n = b/N; \quad b = R_{вогн} - R_{вып},$$

где  $\Delta p$  — перепад давления, возникающий как противодействие центробежной силе при движении элементарного объема по криволинейной траектории;  $N$  — количество участков по высоте канала;  $R_{вогн}$  и  $R_{вып}$  — радиусы кривизны вогнутой и выпуклой стенок канала.

Давление газа на участок вогнутой стенки  $p_{вогн}$  определяем следующим образом:

$$F_{д2-1} = F_{цб1};$$

$$F_{д3-2} = F_{цб2} + F_{д2-1};$$

$$F_{д\Sigma} = F_{цб3} + F_{д3-2};$$

$$p_{вогн} = p_0 + \Delta n \left( \frac{\rho_1 c_1^2}{r_1} + \dots + \frac{\rho_N c_N^2}{r_N} \right),$$

где цифры в нижних индексах параметров соответствуют номерам участков.

Так как значения давлений, плотностей и скоростей течения газа каждого элементарного объема связаны между собой, их можно уточнить путем итерационного расчета. В качестве начальных данных выступают начальная скорость течения потока  $c_{вогн}$  и плотность газа  $\rho_{вогн}$  перед криволинейным каналом:

$$c_{вогн} = \sqrt{\frac{(p_0^* - p_{вогн})}{2\rho_{вогн}}}.$$

Сложность возникает с определением давления газа у выпуклой стенки  $p_{вып}$ . Интуитивным кажется подход, согласно которому давле-

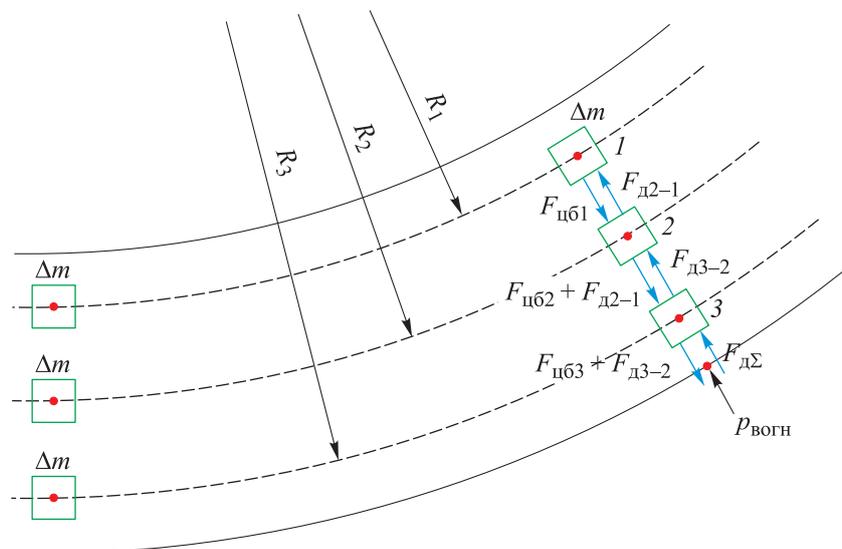


Рис. 2. Расчетная схема действия сил при разбиении потока на элементарные объемы

ние газа на участок выпуклой стенки настолько меньше среднего статического, насколько оно больше у вогнутой стенки. Но проведенные далее расчеты показали некоторое занижение скорости течения газа у выпуклой стенки, вычисленной таким образом.

Однако будем применять именно такой способ определения параметров на выпуклой стенке, так как поиск другого, более оптимального, может составить тему для дальнейшего исследования:

$$p_{\text{вып}} = p_0 - (p_{\text{вогн}} - p_0);$$

$$p_{\text{вып}} = 2p_0 - p_{\text{вогн}};$$

$$c_{\text{вып}} = \sqrt{\frac{(p_0^* - p_{\text{вып}})}{2\rho_{\text{вып}}}},$$

где  $p_{\text{вып}}$ ,  $c_{\text{вып}}$  и  $\rho_{\text{вып}}$  — давление, скорость течения и плотность газа у выпуклой стенки.

**Применение уравнений импульсов.** При таком подходе единицу массы газа будем рассматривать как материальную точку, обладающую массой и начальным вектором скорости. После взаимодействия со стенкой меняется направление вектора скорости, а стенка канала воспринимает на себя некоторый импульс взаимодействия. В локальной системе координат вектор скорости течения потока можно разложить на нормальную  $c_n$  и тангенциальную  $c_s$  составляющие [14].

После взаимодействия со стенкой канала единица массы газа сохраняет тангенциальную составляющую скорости, а нормальная меняется на противоположную. Импульс одного взаимодействия можно получить в следующем виде (рис. 3):

$$q = \Delta m c_n - (-\Delta m c_n);$$

$$q = 2c_n \Delta m;$$

$$c_n = c \cos \beta;$$

$$\beta = \arcsin \frac{R_{\text{вогн}} - y_{\text{соуд}}}{R_{\text{вогн}}},$$

где  $\beta$  — угол наклона нормали канала к направлению начальной скорости единицы массы газа;  $y_{\text{соуд}}$  — вертикальная координата точки соударения в системе координат;  $y = 0$ ,  $x = 0$  в начальной точке вогнутой образующей канала.

Массовый расход газа  $\bar{m}$  — это масса газа в единицу времени. Сила удара  $F_{\text{уд}}$ , действующая

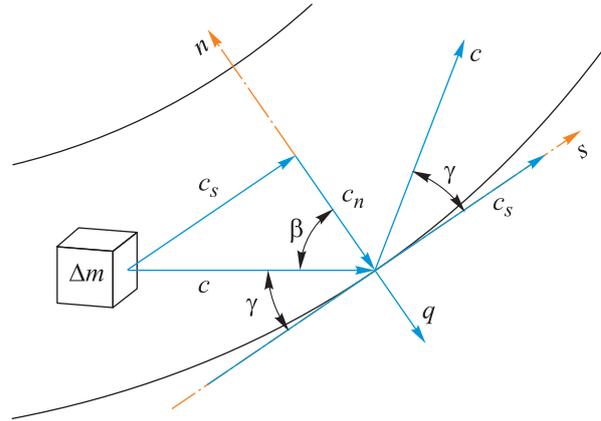


Рис. 3. Схема взаимодействия элемента массы газа со стенкой канала

на стенку, зависит от продолжительности воздействия на нее импульса. Таким образом, единицы времени сокращаются, и сила взаимодействия единицы массы газа со стенкой определяется массовым расходом газа, его скоростью течения и углом, под которым он попадает на стенку канала. Сила удара создает давление в точке канала.

Можно записать следующее:

$$\bar{m} = \frac{m}{dt}; \quad \Delta m = \Delta \bar{m} dt;$$

$$F_{\text{уд}} = \frac{q}{dt} = 2c_n \Delta \bar{m} = F_{\text{д}}.$$

В качестве инженерного подхода разбиваем входное сечение канала на участки по высоте, определяем массовые расходы участков входного сечения и разбиваем длину вогнутой стенки криволинейного канала на конечное число элементарных дуг:

$$l_{\text{дуг}} = \frac{R_{\text{вогн}} \pi \alpha}{180 n_{\text{дуг}}}; \quad f_{\text{уч}} = l_{\text{дуг}} da;$$

$$\Delta \bar{m} = \frac{\bar{m}}{N};$$

где  $l_{\text{дуг}}$  — длина вогнутой стенки канала;  $\alpha$  — угол поворота потока на диффузорном участке вогнутой стенки канала;  $n_{\text{дуг}}$  — количество участков, на которое разбита вогнутая стенка канала;  $f_{\text{уч}}$  — площадь поверхности, очерченной элементарной дугой вогнутой стенки канала.

Давление на элементарную дугу  $i$  определяет количество взаимодействий единиц массы газа с поверхностью элементарной дуги (рис. 4)

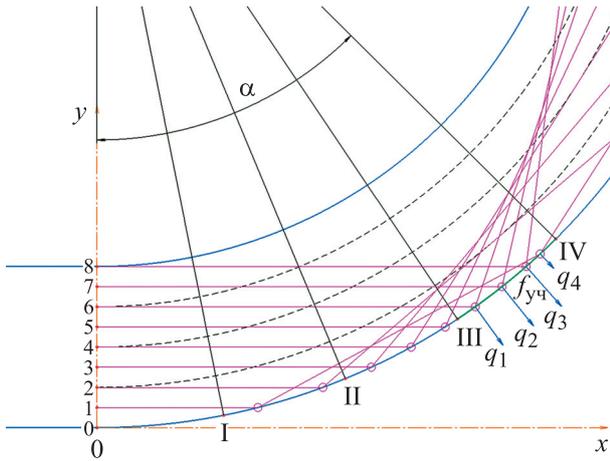


Рис. 4. Расчетная схема разбиения потока на элементарные массы и создания импульсов взаимодействия со стенкой канала

$$p_{\text{вогн } i} = p_0 + \frac{\sum_{y_{i-1}}^{y_i} F_{\text{д}}}{f_{\text{уч}}},$$

где  $y_{i-1}$  и  $y_i$  — вертикальная координата на входе в элементарную дугу  $i$  и на выходе из нее.

**Применение уравнений молекулярно-кинетической теории.** Согласно молекулярно-кинетической теории, давление рабочей среды на стенку сосуда  $p$  определяется количеством молекул газа, их массой и средней скоростью их броуновского движения  $\langle v \rangle$  [15].

Если газ статичен, то в один момент времени только треть молекул взаимодействует со стенкой сосуда, вследствие чего давление рабочей среды на стенку сосуда определяется выражением

$$p = \frac{1}{3} n_{\text{мол}} m_0 \langle v^2 \rangle,$$

где  $n_{\text{мол}}$  — количество молекул газа в сосуде;  $m_0$  — масса одной молекулы.

Предпринята попытка видоизменить и применить это выражение для потока газа, взаимодействующего со стенкой канала. В таком случае произведение количества молекул на их массу формируют элементарные массы газа, в которых уже не треть, а все молекулы взаимодействуют со стенкой канала. Среднюю броуновскую скорость заменяем нормальной составляющей скорости  $c_n$ , с которой единица массы газа попадает на канал:

$$p_{\text{м.к.т}} = \Delta m c_n^2;$$

$$c_n = c \cos \beta,$$

где  $p_{\text{м.к.т}}$  — давление на поверхность криволинейного канала согласно молекулярно-кинетической теории.

Сложность применения этого выражения связана с неочевидностью критериев выбора единицы массы газа, взаимодействующей со стенкой, а именно выбора промежутка времени, за который массовый расход формирует эту массу. В качестве характерного времени  $\Delta t$  предлагается выбрать время, за которое каждая молекула, одновременно прошедшая начальное сечение криволинейного канала пройдет путь до стенки канала и однократно с ней провзаимодействует (рис. 5):

$$\Delta m = \Delta \bar{m} \Delta t; \quad \Delta t = l_{\text{max}} / c,$$

где  $l_{\text{max}}$  — наибольшая длина пути, которую единица массы газа пройдет от входного сечения до первого взаимодействия со стенкой криволинейного канала.

Тогда давление на участок вогнутой стенки  $i$  можно определить, рассчитав количество взаимодействий элементарных масс газа с учетом скорости течения и угла их попадания на выбранный участок:

$$p_{\text{вогн } i} = p_0 + \sum_{y_{i-1}}^{y_i} p_{\text{м.к.т.}}$$

**Анализ роста давления газа вследствие торможения нормальной составляющей скорости течения потока газа  $p_{\text{торм}}$ .** Этот подход можно использовать благодаря принятому допущению о потенциальности потока. Однако,

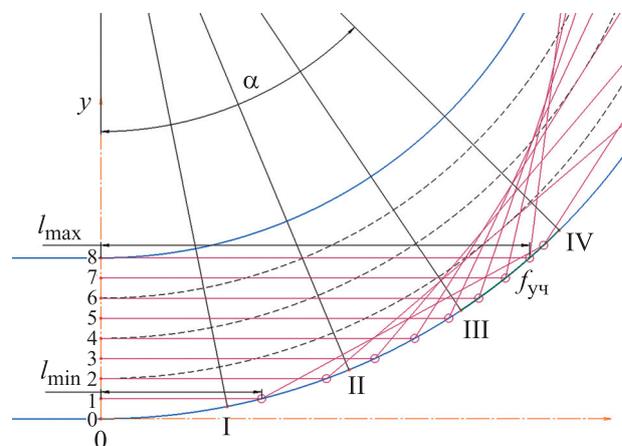


Рис. 5. Расчетная схема разбиения потока на элементарные массы и их воздействия на стенку канала

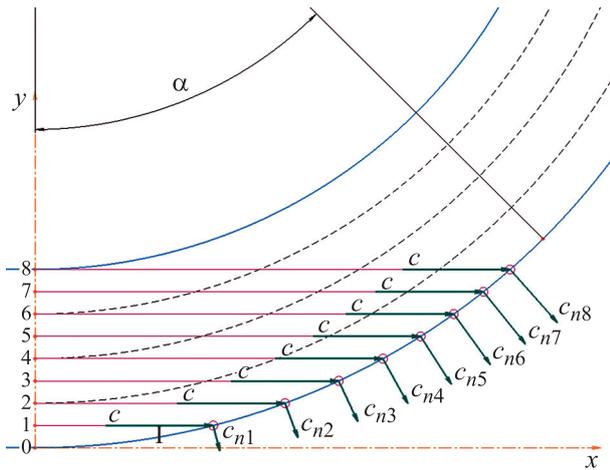


Рис. 6. Расчетная схема торможения нормальной составляющей скорости течения элементарных масс на стенке канала

как будет показано далее, практически во всех случаях действительного течения газа имеет место нарушение этого допущения, что, тем не менее, не сказывается определяющим образом на качестве полученных результатов.

Давление торможением вычисляем по выражению

$$p_{\text{торм}} = \frac{\rho c_n^2}{2}.$$

Далее определяем участок и наибольшую нормальную составляющую скорости течения потока газа, и, следовательно, наибольшего местного статического давления:

$$c_{n8} > c_{n1}; \quad p_{\text{торм}8} > p_{\text{торм}1};$$

$$p_{\text{вогн}} = p_0 + p_{\text{торм}8}.$$

**Эталонный расчет.** Для сопоставления описанных подходов и выбора наиболее точного из них требовался некоторый эталон, по сравнению с которым можно сделать выводы о преимуществах того или иного подхода. В качестве эталона приняты результаты расчета течения потока газа в каналах исследуемых конфигураций с помощью средств вычислительной газовой динамики. Как уже указывалось, такие расчеты имеют высокую степень адекватности и не получили широкого распространения в инженерных методах по причине громоздкости и сложности экспорта в состав инженерных расчетов.

В рамках большинства комплексов вычислительной газовой динамики течение газа в каналах описывается уравнениями Навье —

Стокса с теми или иными упрощениями [16]. Уравнения Навье — Стокса, совместно с уравнением неразрывности среды, законом сохранения энергии и уравнением состояния газа однозначно определяют связь между компонентами скорости течения, давлением, температурой и плотностью газа в каждой расчетной точке проточной части.

**Расчет различных каналов и сопоставление с эталонным расчетом.** Проведен расчет течения потока в шести криволинейных каналах (рис. 7) со следующими параметрами:

- $R_{\text{вып}} = 3 \text{ м}; \quad R_{\text{вогн}} = 4,0 \text{ м}, \quad 2\alpha = 60^\circ;$
- $R_{\text{вып}} = 3 \text{ м}; \quad R_{\text{вогн}} = 4,0 \text{ м}, \quad 2\alpha = 90^\circ;$
- $R_{\text{вып}} = 2 \text{ м}; \quad R_{\text{вогн}} = 4,0 \text{ м}, \quad 2\alpha = 60^\circ;$
- $R_{\text{вып}} = 2 \text{ м}; \quad R_{\text{вогн}} = 4,0 \text{ м}, \quad 2\alpha = 90^\circ;$
- $R_{\text{вып}} = 2 \text{ м}; \quad R_{\text{вогн}} = 2,5 \text{ м}, \quad 2\alpha = 60^\circ;$
- $R_{\text{вып}} = 2 \text{ м}; \quad R_{\text{вогн}} = 2,5 \text{ м}, \quad 2\alpha = 90^\circ.$

Для получения эталонной картины течения потока выполнена серия трехмерных расчетов с помощью средств вычислительной газовой динамики.

Картина течения потока для криволинейного канала с параметрами  $R_{\text{вып}} = 3 \text{ м}, \quad R_{\text{вогн}} = 4,0 \text{ м}$  и  $2\alpha = 90^\circ$  приведена на рис. 8. Следует обратить внимание на выбор точки пробы, так как для действительного течения потока в пристеночных зонах (даже за пределами пограничного слоя) нарушаются условия потенциальности потока. Вследствие наличия потерь и гидравлического сопротивления необходимое полное давление потока на входе немного больше расчетного значения. Кроме того, ближе к стенкам полное давление в точках также имеет тенденцию к незначительному уменьшению.

В связи с этим для определения параметров в проточной части выбраны точки, полное

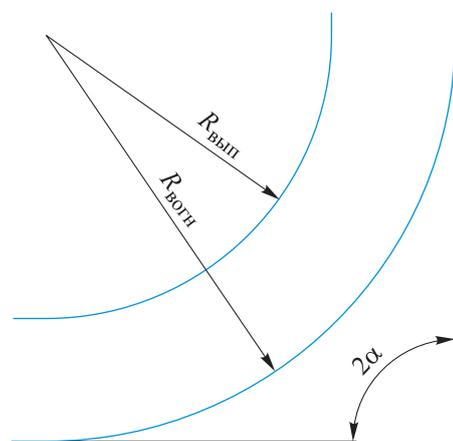


Рис. 7. Расчетная схема криволинейных каналов

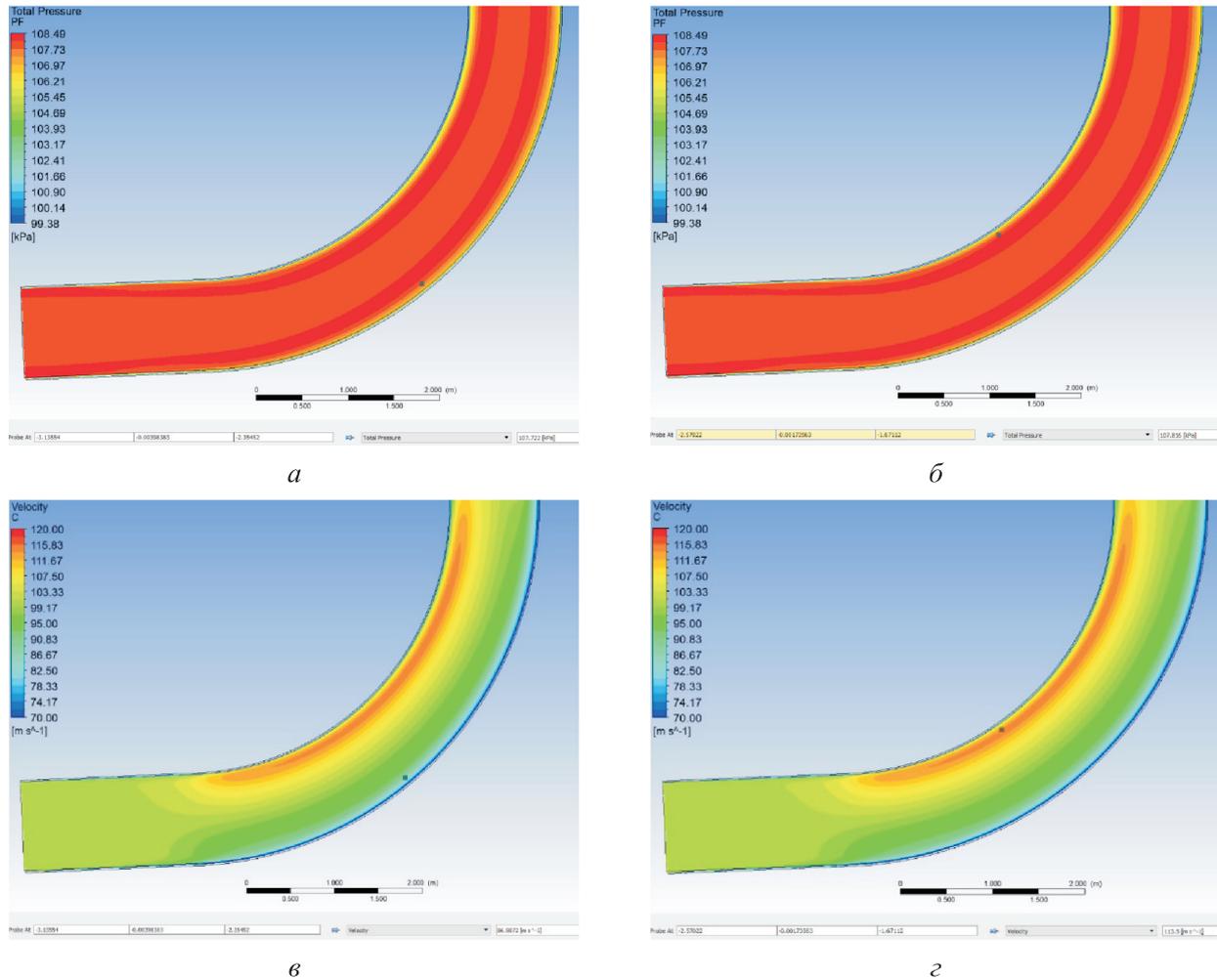


Рис. 8. Результаты расчета картины течения потока с применением средств вычислительной газовой динамики в криволинейном канале с параметрами  $R_{\text{вып}} = 3 \text{ м}$ ,  $R_{\text{вогн}} = 4,0 \text{ м}$  и  $2\alpha = 90^\circ$ :  
 а и в — поля полного давления и скорости течения газа у вогнутой стенки;  
 б и г — поля полного давления и скорости течения газа у выпуклой стенки

давление в которых наиболее близко к расчетному, несмотря на расстояние, на которое такие точки отстают от стенки. Очевидно, чем ближе точка пробы к вогнутой стенке, тем меньше скорость течения газа в ней. Этот фактор следует учитывать при сравнении и анализе результатов эталонного расчета и данных, полученных с применением описанных подходов.

Результаты расчетов параметров газа с помощью различных подходов приведены в табл. 1, где  $\Delta p_{\text{вып}}$ ,  $\Delta p_{\text{вогн}}$ ,  $\Delta \rho_{\text{вып}}$ ,  $\Delta \rho_{\text{вогн}}$ ,  $\Delta c_{\text{вып}}$  и  $\Delta c_{\text{вогн}}$  — относительная погрешность результатов расчета соответствующих параметров согласно описанным подходам относительно эталонных;  $\max \Delta$  — максимальная относительная погрешность.

Таблица 1

Результаты расчетов параметров газа с помощью различных подходов

Подход	$p_{\text{вып}}$ , Па	$\Delta p_{\text{вып}}$ , %	$p_{\text{вогн}}$ , Па	$\Delta p_{\text{вогн}}$ , %	$\rho_{\text{вып}}$ , кг/м <sup>3</sup>	$\Delta \rho_{\text{вып}}$ , %	$\rho_{\text{вогн}}$ , кг/м <sup>3</sup>	$\Delta \rho_{\text{вогн}}$ , %	$c_{\text{вып}}$ , м/с	$\Delta c_{\text{вып}}$ , %	$c_{\text{вогн}}$ , м/с	$\Delta c_{\text{вогн}}$ , %	$\max \Delta$
<i>При параметрах канала <math>R_{\text{вып}} = 3 \text{ м}</math>, <math>R_{\text{вогн}} = 4,0 \text{ м}</math> и <math>2\alpha = 60^\circ</math></i>													
Средства вычислительной газодинамики	99 914	—	102 886	—	1,214	—	1,239	—	116,13	—	86,90	—	—
Равновесие в поле действия сил	97 748	2,16	104 901	1,95	1,162	4,28	1,247	0,64	128,52	10,66	62,60	27,96	27,96

Продолжение таблицы 1

Подход	$p_{\text{вып}}, \text{Па}$	$\Delta p_{\text{вып}}, \%$	$p_{\text{вогн}}, \text{Па}$	$\Delta p_{\text{вогн}}, \%$	$\rho_{\text{вып}}, \text{кг/м}^3$	$\Delta \rho_{\text{вып}}, \%$	$\rho_{\text{вогн}}, \text{кг/м}^3$	$\Delta \rho_{\text{вогн}}, \%$	$c_{\text{вып}}, \text{м/с}$	$\Delta c_{\text{вып}}, \%$	$c_{\text{вогн}}, \text{м/с}$	$\Delta c_{\text{вогн}}, \%$	max $\Delta$
Уравнение сохранения импульсов	99 421	0,49	103 228	0,33	1,202	0,98	1,248	0,72	115,60	0,45	82,30	5,29	5,29
Уравнения молекулярно-кинетической теории	99 764	0,15	102 885	0,01	1,206	0,65	1,244	0,40	112,88	2,79	85,67	1,41	2,79
Адиабатическое торможение нормальной составляющей скорости	99 889	0,02	102 760	0,12	1,208	0,49	1,242	0,24	111,90	3,64	86,90	0,00	3,64
<i>При параметрах канала <math>R_{\text{вып}} = 3 \text{ м}</math>, <math>R_{\text{вогн}} = 4,0 \text{ м}</math> и <math>2\alpha = 90^\circ</math></i>													
Средства вычислительной газодинамики	99 827	–	103 007	–	1,213	–	1,240	–	113,50	–	87,22	–	–
Равновесие в поле действия сил	97 748	2,10	104 901	1,80	1,162	4,20	1,247	0,56	128,52	13,21	62,60	28,22	28,22
Уравнение сохранения импульсов	95 870	3,96	106 779	3,66	1,159	4,45	1,291	84,75	141,30	24,49	32,30	62,96	62,96
Уравнения молекулярно-кинетической теории	96 621	3,21	106 028	2,93	1,168	3,71	1,282	3,38	136,10	19,91	47,10	45,99	45,99
Адиабатическое торможение нормальной составляющей скорости	98 644	1,18	104 005	0,96	1,190	1,89	1,257	1,37	121,50	7,04	74,10	15,04	15,04
<i>При параметрах канала <math>R_{\text{вып}} = 2 \text{ м}</math>, <math>R_{\text{вогн}} = 4,0 \text{ м}</math> и <math>2\alpha = 60^\circ</math></i>													
Средства вычислительной газодинамики	96 423	–	103 968	–	1,184	–	1,249	–	139,00	–	78,49	–	–
Равновесие в поле действия сил	Не удалось выполнить расчет												
Уравнение сохранения импульсов	96 019	0,41	106 630	2,56	1,161	1,94	1,289	3,20	140,30	0,93	35,70	54,51	54,51
Уравнения молекулярно-кинетической теории	99 133	2,81	103 516	0,43	1,198	1,18	1,251	0,16	117,80	15,25	79,30	1,03	15,25
Адиабатическое торможение нормальной составляющей скорости	99 889	3,59	102 760	1,16	1,207	1,94	1,243	0,48	111,90	19,49	86,90	10,71	19,49
<i>При параметрах канала <math>R_{\text{вып}} = 2 \text{ м}</math>, <math>R_{\text{вогн}} = 4,0 \text{ м}</math> и <math>2\alpha = 90^\circ</math></i>													
Средства вычислительной газодинамики	96 085	–	104 299	–	1,181	–	1,252	–	141,60	–	75,65	–	–
Равновесие в поле действия сил	Не удалось выполнить расчет												
Уравнение сохранения импульсов	95 694	0,4	106 955	2,54	1,104	6,52	1,293	3,27	142,50	0,63	27,70	63,38	63,38
Уравнения молекулярно-кинетической теории	97 604	1,58	105 045	0,71	1,180	0,08	1,270	1,43	129,10	8,82	61,50	18,70	18,70

Окончание таблицы 1

Подход	$p_{\text{вып}}$ , Па	$\Delta p_{\text{вып}}$ , %	$p_{\text{вогн}}$ , Па	$\Delta p_{\text{вогн}}$ , %	$\rho_{\text{вып}}$ , кг/м <sup>3</sup>	$\Delta \rho_{\text{вып}}$ , %	$\rho_{\text{вогн}}$ , кг/м <sup>3</sup>	$\Delta \rho_{\text{вогн}}$ , %	$c_{\text{вып}}$ , м/с	$\Delta c_{\text{вып}}$ , %	$c_{\text{вогн}}$ , м/с	$\Delta c_{\text{вогн}}$ , %	max $\Delta$
Адиабатическое торможение нормальной составляющей скорости	98 363	2,37	104 286	0,01	1,189	0,67	1,261	0,71	123,60	12,71	70,90	6,27	12,71
<i>При параметрах канала <math>R_{\text{вып}} = 2</math> м, <math>R_{\text{вогн}} = 2,5</math> м и <math>2\alpha = 60^\circ</math></i>													
Средства вычислительной газодинамики	100 544	–	102614	–	1,220	–	1,236	–	111,20	–	87,50	–	–
Равновесие в поле действия сил	98585	1,94	104 064	1,41	1,172	3,93	1,237	0,08	122,30	9,98	72,80	16,80	16,80
Уравнение сохранения импульсов	982 55	2,27	104 394	1,73	1,188	2,62	1,262	2,1	124,4	11,87	69,60	20,45	20,45
Уравнения молекулярно-кинетической теории	100 848	0,3	101 801	0,79	1,219	0,08	1,231	0,4	104,10	6,38	95,8	20,45	20,45
Адиабатическое торможение нормальной составляющей скорости	99 889	0,65	102 760	0,14	1,208	0,98	1,242	0,48	111,80	0,54	86,90	0,68	0,98
<i>При параметрах канала <math>R_{\text{вып}} = 2</math> м, <math>R_{\text{вогн}} = 2,5</math> м и <math>2\alpha = 90^\circ</math></i>													
Средства вычислительной газодинамики	100 497	–	102 791	–	1,219	–	1,237	–	113,20	–	85,30	–	–
Равновесие в поле действия сил	98 585	1,90	104 064	1,23	1,172	3,85	1,237	0,00	122,30	8,03	72,90	14,53	14,53
Уравнение сохранения импульсов	98 597	1,89	104 052	1,22	1,192	2,21	1,258	1,69	121,90	7,68	73,5	13,83	13,83
Уравнения молекулярно-кинетической теории	100 711	0,21	101 938	0,83	1,217	0,16	1,233	0,32	105,20	7,06	94,5	10,78	10,78
Адиабатическое торможение нормальной составляющей скорости	99 119	1,37	103 530	0,71	1,198	1,72	1,251	1,13	117,90	4,15	79,14	7,22	7,22

Анализ полученных результатов позволяет заключить следующее:

- данные расчета согласно подходу, основанному на равновесии в поле действия сил, не различаются у каналов с разным углом изгиба;

- подход, основанный на равновесии в поле действия сил, неприменим для расчета широких каналов, так как местные значения статического давления газа на вогнутой стороне могут быть больше полного давления газа на входе;

- данные расчета, основанного на уравнении импульсов, чаще всего имели самое большое расхождение с эталонными значениями;

- применение молекулярно-кинетической теории для расчета криволинейного канала дает очень нестабильные результаты, вследствие чего не рекомендуется к применению;

- данные, полученные согласно подходу, основанному на адиабатическом торможении нормальной составляющей скорости течения потока, наиболее близки к значениям эталонного расчета; относительная погрешность составила менее 10 %.

**Расчет канала переменного сечения.** Для апробации применимости подхода, основанного на адиабатическом торможении нормальной

составляющей скорости течения потока, выполнен расчет для сужающегося криволинейного канала со следующими параметрами:  $R_{\text{вогн}} = 4$  м,  $2\alpha = 90^\circ$ , ширина на входе  $b_{\text{вх}} = 1,5$  м и выходе  $b_{\text{вых}} = 0,79$  м (рис. 9).

Расчет проводили в следующей последовательности. Криволинейный канал разбивали на некоторое количество участков одинаковой длины контрольными сечениями. Определяли площади контрольных сечений. Исходя из уравнения неразрывности, вычисляли среднюю скорость течения потока в каждом контрольном сечении.

Так как с ростом скорости течения потока падает статическое давление газа, а следовательно, и его плотность, расчет проводили итерационно, приняв в качестве первого приближения плотность газа в контрольном сечении  $\rho_{\text{к.с}}$ , равной  $\rho_0$ , используя следующие выражения:

$$c_{\text{к.с}0} = c \frac{F_0}{F_{\text{к.с}}};$$

$$p_{\text{к.с}0} = p_0^* - \frac{\rho_0 c_{\text{к.с}0}^2}{2};$$

$$\rho_{\text{к.с}0} = \frac{p_{\text{к.с}0}}{RT_0^* \left( \frac{p_{\text{к.с}0}}{p_0^*} \right)^{\frac{k-1}{k}}};$$

$$c_{\text{к.с}1} = c \frac{F_0}{F_{\text{к.с}}} \frac{\rho_0}{\rho_{\text{к.с}0}},$$

где  $c_{\text{к.с}0}$ ,  $p_{\text{к.с}0}$  и  $\rho_{\text{к.с}0}$  — скорость течения, статическое давление и плотность потока газа в контрольном сечении в начальном приближении соответственно;  $c_{\text{к.с}1}$  — скорость течения потока газа в контрольном сечении на входе в первую итерацию расчета;  $F_0$  — площадь на

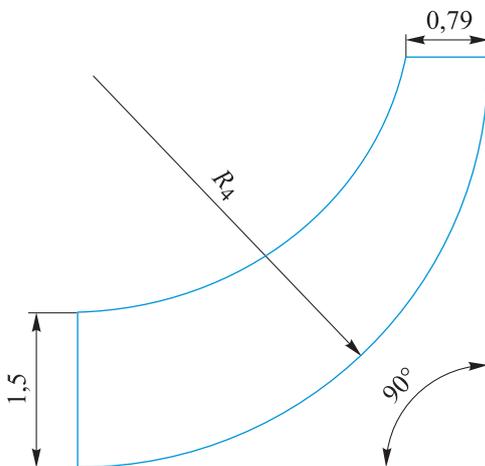


Рис. 9. Расчетная схема сужающегося криволинейного канала

входе в криволинейный канал;  $F_{\text{к.с}}$  — площадь контрольного сечения.

Как правило, трех–четырёх итераций достаточно, чтобы значения последующих итераций различались не более чем на 1 %.

На следующем шаге определяли дополнительное давление торможения в каждой точке криволинейного канала, имеющей вертикальную координату не больше начальной точки выпуклой образующей канала:

$$p_{\text{торм}} = \frac{\rho_{\text{к.с}} c_n^2}{2};$$

$$c_n = c \cos \beta_{\text{к.с}},$$

где  $\beta_{\text{к.с}}$  — угол наклона образующей контрольного сечения к направлению начальной скорости течения единицы массы газа.

Местное статическое давление газа на вогнутой стороне канала вычисляли как

$$p_{\text{к.с.вогн}} = p_{\text{к.с}} + p_{\text{торм}}.$$

Плотность  $\rho_{\text{к.с.вогн}}$  и скорость течения газа  $c_{\text{к.с.вогн}}$  на вогнутой стороне данного участка проточной части определяли по следующим выражениям:

$$\rho_{\text{к.с.вогн}} = \frac{p_{\text{к.с.вогн}}}{RT_0^* \left( \frac{p_{\text{к.с.вогн}}}{p_0^*} \right)^{\frac{k-1}{k}}};$$

$$c_{\text{к.с.вогн}} = \sqrt{\frac{2(p_0^* - p_{\text{к.с.вогн}})}{\rho_{\text{к.с.вогн}}}}.$$

В качестве допущения принято, что увеличение статического давления газа на вогнутой поверхности канала равно уменьшению статического давления на выпуклой, поэтому

$$p_{\text{к.с.вып}} = p_{\text{к.с}} - p_{\text{торм}}.$$

Далее аналогичным образом рассчитывали плотность  $\rho_{\text{к.с.вып}}$  и скорость течения газа  $c_{\text{к.с.вып}}$  в контрольных сечениях на выпуклой стороне канала:

$$\rho_{\text{к.с.вып}} = \frac{p_{\text{к.с.вып}}}{RT_0^* \left( \frac{p_{\text{к.с.вып}}}{p_0^*} \right)^{\frac{k-1}{k}}};$$

$$c_{\text{к.с.вып}} = \sqrt{\frac{2(p_0^* - p_{\text{к.с.вып}})}{\rho_{\text{к.с.вып}}}}.$$

Результаты расчета согласно предложенной методике и полученные с помощью средств вычислительной газовой динамики, приведены на

рис. 10 и в табл. 2. Следует отметить, что в данном случае картина поля полного давления газа более равномерная. Следовательно, в качестве точек снятия проб выбраны точки, отстающие на 2 % высоты канала от стенки. Расчет настро-

ен так, чтобы на этом расстоянии влияние пограничного слоя и пристеночных явлений было пренебрежимо малым.

Сопоставление результатов предложенного упрощенного расчета с эталонным показало,

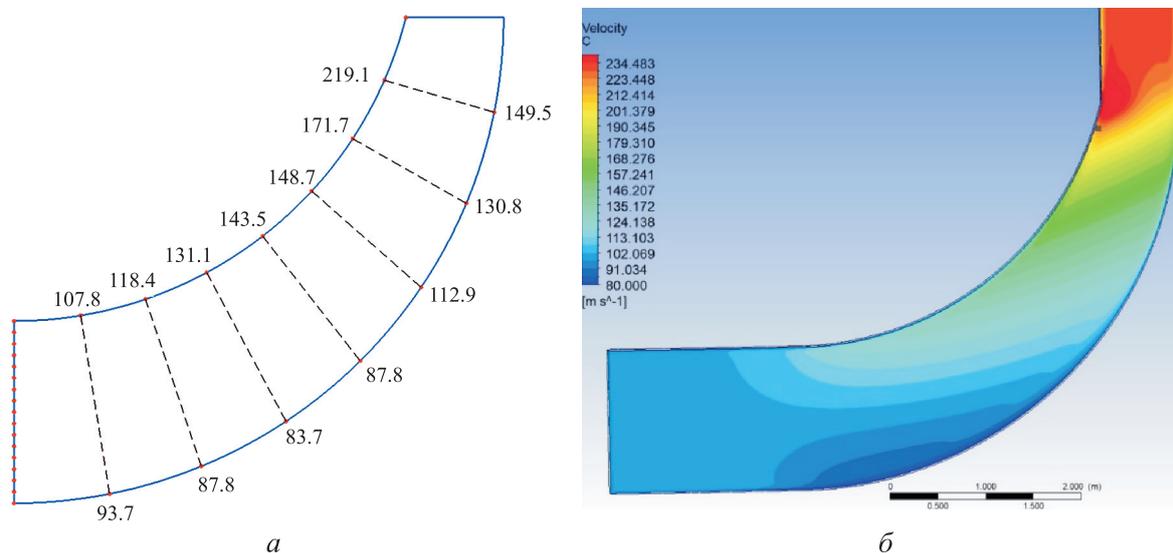


Рис. 10. Результаты расчета, основанного на адиабатическом торможении нормальной составляющей скорости течения потока, (а) и эталонное поле скоростей течения потока в исследуемом канале (б)

Таблица 2

**Результаты расчета скорости течения потока газа в контрольных сечениях по предложенной и эталонной методикам**

Стенка	Контрольное сечение	Скорость течения потока газа, м/с	Погрешность	
			абсолютная, м/с	относительная %
Вогнутая	1	93,7/81,4	12,3	15,1
	2	87,8/81,6	6,2	7,5
	3	83,7/86,3	2,6	3,0
	4	87,8/94,3	6,5	6,9
	5	112,9/106,7	6,2	5,8
	6	130,8/125,4	5,4	4,3
	7	149,5/154,8	5,3	3,4
Выпуклая	1	107,8/119,9	12,1	10,1
	2	118,4/124,6	6,2	4,9
	3	131,1/129,8	1,3	1,0
	4	143,5/138,0	5,5	4,0
	5	148,7/149,9	1,2	0,8
	6	171,7/168,1	3,6	2,2
	7	219,1/196,9	22,2	11,3

*Примечание.* В числителе дроби указаны значения, полученные согласно предложенной методике, в знаменателе — с использованием средств вычислительной газовой динамики.

что кроме входного и выходного участков, расхождение в среднем составляет 5,5 % по вогнутой стороне и 2,5 % по выпуклой.

Расчет расширяющегося канала не был выполнен по причине очевидной сложности характера течения газа в диффузорном канале. Следовательно, упрощенные подходы, игнорирующие явления, связанные с возникновением низкоэнергетических зон [17], нельзя применять даже в инженерных целях.

## Выводы

1. Рассмотрены четыре подхода к упрощенной оценке газодинамических параметров газа при течении в криволинейных каналах постоянного сечения.

2. Проведены расчеты параметров газа согласно каждому подходу. Полученные данные

сопоставлены с результатами, полученными с помощью вычислительной газовой динамики.

3. В качестве наиболее точного выбран подход, основанный на оценке повышения местного статического давления газа вследствие торможения нормальной к стенке составляющей скорости течения газа.

4. Выбранный подход опробован на расчете параметров газа в сужающемся криволинейном канале. По результатам сопоставления данных расчета с эталонными выявлено удовлетворительное совпадение значений на всех участках, кроме входных и выходных.

5. Предложенный подход можно рекомендовать для оценочных инженерных расчетов течения идеального газа в криволинейных каналах.

## Литература

- [1] Галеркин Ю.Б. *Турбокомпрессоры. Рабочий процесс, расчет и проектирование проточной части*. Москва, КХТ, 2010. 581 с.
- [2] Дейч М.Е. *Техническая газодинамика*. Москва, Госэнергоиздат, 1961. 671 с.
- [3] Гортышов Ю.Ф., Дресвянников Ф.Н., Идиатуллин Н.С. *Теория и техника теплофизического эксперимента*. Москва, Энергоатомиздат, 1985. 360 с.
- [4] Данилишин А.М. Верификация CFD-расчета на суперкомпьютере среднерасходных модельных ступеней. *Суперкомпьютерные дни в России. Сб. мат. Межд. конф.* Москва, МГУ, 2016, с. 816–826.
- [5] Хисамеев И.Г., Футин В.А., Шубкин И.М. Проведение верификации моделей проточной части турбомашин на программе Flow Vision. *Вестник Казанского технологического университета*, 2011, № 22, с. 106–109.
- [6] Мелашич С.В. Решение обратных задач газодинамики плоских компрессорных решеток на основе численного моделирования турбулентных течений. *Техническая механика*, 2015, № 1, с. 65–72.
- [7] Елизарова Т.Г. *Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Лекции по математическим моделям и численным методам в динамике газа и жидкости*. Москва, Научный мир, 2007. 350 с.
- [8] Амосов Е.А., Журавель Л.В. Моделирование вязкого поведения жидкости и газа. *Современные материалы, техника и технологии*, 2019, № 1, с. 70–75.
- [9] Гладышев Н.Н. *Гидрогазодинамика: конспект лекций*. Санкт-Петербург, Изд-во Политех. ун-та, 2012. 159 с.
- [10] Крайко А.Н. *Теоретическая газовая динамика. Краткий курс*. Москва, МФТИ, 2007. 299 с.
- [11] Сайтов В.Е., Суворов А.Н. Математическая модель движения частицы в криволинейном пневмотранспортирующем канале. *Пермский аграрный вестник*, 2015, № 2, с. 55–60.
- [12] Кампсти Н. *Аэродинамика компрессоров*. Москва, Мир, 2000. 688 с.
- [13] Буров А.А., Буров А.И., Карамушко А.В. Воздушное течение в криволинейном канале. *Труды Одесского политехнического университета*, 2009, № 2, с. 174–177.
- [14] Палий Е.Т., Замков А.В., Булейко В.Г. Механизм создания сопротивления плоской поверхности в газовом потоке тангенциальной составляющей скорости молекулы газа. *Известия ЮФУ. Технические науки*, 2012, № 1, с. 186–191.
- [15] Лекомцев П.Л., Дресвянникова Е.В. *Механика жидкости и газа*. Ижевск, Ижевская ГСХА, 2010. 136 с.

- [16] Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость. *Успехи математических наук*, 2003, т. 58, № 2, с. 45–78.
- [17] Козлов В.В. Физика структуры потоков. Отрыв потока. *Соросовский образовательный журнал*, 1998, т. 29, № 4, с. 86–94.

## References

- [1] Galerkin Yu.B. *Turbokompressory. Rabochiy protsess, raschet i proektirovanie protochnoy chasti* [Turbochargers. Working Process, Calculation and Design of Flow Part.]. Moscow, KKhT Publ., 2010. 581 p. (In Russ.).
- [2] Deych M.E. *Tekhnicheskaya gazodinamika* [Technical gas dynamics]. Moscow, Gosenergoizdat Publ., 1961. 671 p. (In Russ.).
- [3] Gortyshov Yu.F., Dresvyannikov F.N., Idiatullin N.S. *Teoriya i tekhnika teplofizicheskogo eksperimenta* [Theory and technique of thermophysical experiment]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1985. 360 p. (In Russ.).
- [4] Danilishin A.M. [Verification of the CFD calculation on a supercomputer of medium flow model stages of centrifugal compressor]. *Superkompyuternye dni v Rossii. Sb. mat. Mezhd. konf.* [Russian Supercomputing Days. Proc. Int. Conf.]. Moscow, MGU Publ., 2016, pp. 816–826. (In Russ.).
- [5] Khisameev I.G., Futin V.A., Shubkin I.M. Verification of turbomachine flow models with Flow Vision. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta* [Herald of Technological University], 2011, no. 22, pp. 106–109. (In Russ.).
- [6] Melashich S.V. Solution of inverse problems of gas dynamics of flat compressor cascades based on numerical simulation of turbulent flows. *Tekhnicheskaya mekhanika* [Technical Mechanics], 2015, no. 1, pp. 65–72. (In Russ.).
- [7] Elizarova T.G. *Kvazigazodinamicheskie uravneniya i metody rascheta vyazkikh techeniy. Lektsii po matematicheskim modelyam i chislennym metodam v dinamike gaza i zhidkosti* [Quasi-gasodynamic equations and methods for calculating viscous flows. Lectures on mathematical models and numerical methods in gas and fluid dynamics]. Moscow, Nauchnyy mir Publ., 2007. 350 p. (In Russ.).
- [8] Amosov E.A., Zhuravel L.V. Modeling of liquid and gas viscous behavior. *Sovremennye materialy, tekhnika i tekhnologii*, 2019, no. 1, pp. 70–75. (In Russ.).
- [9] Gladyshev N.N. *Gidrogazodinamika: konspekt lektsiy* [Hydrogasodynamics: lecture notes]. Sankt-Petersburg, Izd-vo Politekh. un-ta Publ., 2012. 159 p. (In Russ.).
- [10] Krayko A.N. *Teoreticheskaya gazovaya dinamika. Kratkiy kurs* [Theoretical gas dynamics. Short course]. Moscow, MFTI Publ., 2007. 299 p. (In Russ.).
- [11] Saitov V.E., Suvorov A.N. Mathematical model of element motion in a curved pneumatic conveyor channel. *Permskiy agrarnyy vestnik* [Perm Agrarian Journal], 2015, no. 2, pp. 55–60. (In Russ.).
- [12] Cumpsty N.A. *Compressor aerodynamics*. Krieger, 2004. 552 p. (Russ. ed.: *Aerodinamika kompressorov*. Moscow, Mir Publ., 2000. 688 p.).
- [13] Burov A.A., Burov A.I., Karamushko A.V. Air flow in the curvilinear channel. *Trudy Odesskogo politekhnicheskogo universiteta*, 2009, no. 2, pp. 174–177. (In Russ.).
- [14] Paliy E.T., Zamkov A.V., Buleyko V.G. The body resistance creation mechanism by the tangential component of a gas molecule speed in a gas stream. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2012, no. 1, pp. 186–191. (In Russ.).
- [15] Lekomtsev P.L., Dresvyannikova E.V. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Liquid mechanics]. Izhevsk, Izhevskaya GSKhA Publ., 2010. 136 p. (In Russ.).
- [16] Ladyzhenskaya O.A. Sixth problem of the millennium: Navier-Stokes equations, existence and smoothness. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 2003, vol. 58, no. 2, pp. 45–78. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. Math. Surv.*, 2003, vol. 58, no. 2, pp. 251–286, doi: <https://doi.org/10.1070/RM2003v058n02ABEH000610>)
- [17] Kozlov V.V. Physics of flow structure. *Otryv potoka. Sorosovskiy obrazovatelnyy zhurnal*, 1998, vol. 29, no. 4, pp. 86–94. (In Russ.).

## Информация об авторах

**КАЛАШНИКОВ Дмитрий Алексеевич** — кандидат технических наук, ассистент кафедры «Вакуумная и компрессорная техника». МГТУ им. Н.Э. Баумана; младший научный сотрудник лаборатории № 10.1. ФГБУН «Объединенный институт высоких температур РАН» (125412, Москва, Российская Федерация, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2, e-mail: kalashnikovniten@mail.ru).

**БОРИСОВ Юрий Александрович** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Вакуумная и компрессорная техника». МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник лаборатории № 10.1. ФГБУН «Объединенный институт высоких температур РАН» (125412, Москва, Российская Федерация, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2, e-mail: boricovyu@gmail.com).

**ЧЕРНЫШЕВ Андрей Владимирович** — доктор технических наук, заведующий кафедрой «Вакуумная и компрессорная техника». МГТУ им. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: av-chernyshev@yandex.ru).

## Information about the authors

**KALASHNIKOV Dmitry Alekseevich** — Candidate of Science (Eng.), Assistant, Department of Vacuum and Compressor Equipment. Bauman Moscow State Technical University; Junior Researcher, Laboratory No. 10.1. Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences (125412, Moscow, Russian Federation, Izhorskaya St., Bldg.13, Block 2, e-mail: kalashnikovniten@mail.ru).

**BORISOV Yury Aleksandrovich** — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Vacuum and Compressor Equipment. Bauman Moscow State Technical University; Senior Researcher, Laboratory No. 10.1. Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences (125412, Moscow, Russian Federation, Izhorskaya St., Bldg.13, Block 2, e-mail: boricovyu@gmail.com).

**CHERNYSHEV Andrey Vladimirovich** — Doctor of Science (Eng.), Head of the Department of Vacuum and Compressor Equipment. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block, 1, 1 e-mail: av-chernyshev@yandex.ru).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Калашников Д.А., Борисов Ю.А., Чернышев А.В. Сопоставление подходов к решению задачи течения идеального газа в криволинейном канале в двухмерной постановке. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 9, с. 62–75.

### Please cite this article in English as:

Kalashnikov D.A., Borisov Yu.A., Chernyshev A.V. Comparing approaches to solving the problem of the ideal gas flow in a curved channel in the two-dimensional setting. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 9, pp. 62–75.