

УДК 629.7.023: 539.3

# Нелинейное деформирование и устойчивость анизогридных круговых цилиндрических оболочек при поперечном изгибе

**Л.П. Железнов**

ФАУ «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина»

## Nonlinear deformation and stability of the anisogrid circular cylindrical shells under transverse bending

**L.P. Zheleznov**

Chaplygin Siberian Scientific Research Institute of Aviation

Изложена конечно-элементная постановка решения задач устойчивости цилиндрических оболочек, выполненных из композиционного материала, с учетом моментности и нелинейности их докритического напряженно-деформированного состояния. Нелинейная задача прочности и устойчивости решена методами конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича. Критические нагрузки определены в процессе решения геометрически нелинейной задачи с помощью критерия Сильвестра. Используются разработанные на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы композитных цилиндрических оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены их жесткие перемещения, что существенно влияет на сходимость решения. Приведены результаты исследования устойчивости консольно защемленной анизогридной композитной круговой цилиндрической оболочки при поперечном изгибе краевой силой. Определено влияние нелинейности деформирования, жесткости подкрепляющего набора, углов укладки подкреплений и толщины оболочки на критические нагрузки потери устойчивости.

**EDN:** QUPSOY, <https://elibrary/qupsoy>**Ключевые слова:** композитные цилиндрические оболочки, поперечный изгиб, нелинейное деформирование, устойчивость оболочек, метод конечных элементов

The paper states a finite element solution to the stability problems for the cylindrical shells made of composite material taking into account the momentness and nonlinearity of their subcritical stress-strain state. The nonlinear problem of strength and stability is solved by the finite element methods and the Newton-Kantorovich linearization. Critical loads are determined in the process of solving a geometrically nonlinear problem using the Sylvester's criterion. The paper uses finite elements of the composite cylindrical shells with the natural curvature developed on the basis of the Timoshenko hypothesis. Rigid displacements are explicitly distinguished in their displacement approximation, which significantly affects convergence of the solution. The paper presents results of studying stability of the cantilever-clamped anisogrid composite circular cylindrical shell exposed to transverse bending by the edge force. It determines the influence of deformation nonlinearity, rigidity of the reinforcement set, angles of laying the reinforcements and the shell thickness on the critical loads in losing stability.

**EDN:** QUPSOY, <https://elibrary/qupsoy>**Keywords:** cylindrical composite shells, transverse bending, nonlinear deformation, shell stability, finite element method

Анизогридные сетчатые конструкции из композиционных материалов, изготавливаемые методом непрерывной намотки, получили широкое распространение в современных летательных аппаратах, особенно в космических. В летательных аппаратах анизогридные сетчатые конструкции могут применяться и как самостоятельные, состоящие только из подкреплений, и совместно с обшивкой (что необходимо для фюзеляжа самолета).

Основополагающий вклад в разработку сетчатых композиционных конструкций внесла школа В.В. Васильева [1]. Аналитические оценки напряженно-деформированного состояния (НДС) регулярной сетчатой оболочки с использованием вариационного принципа и безмоментной теории оболочек и заменой реберной структуры условно сплошным слоем с осредненной жесткостью приведены в работе В.В. Васильева и В.А. Бунакова [2].

Дискретный подход к моделированию сетчатых анизогридных конструкций применяли В.В. Васильев, А.Ф. Разин, А.А. Бабичев, В.П. Булдаков, М.В. Никитин и др. Тем не менее, методы расчета на прочность и устойчивость сетчатых конструкций с учетом нелинейности исходного НДС развиты недостаточно. Большая часть известных решений задач устойчивости оболочек получена аналитическими методами и, как правило, в линейном приближении без учета моментности и нелинейности докритического состояния оболочек, т. е. в классической постановке [3, 4], и крайне мало при нелинейном деформировании [5].

В связи с этим разработка надежных и эффективных методов расчета анизогридных конструкций является актуальной задачей. Наиболее подходящим методом является метод конечных элементов, обладающий такими достоинствами, как универсальность, физичность и неограниченная возможность применения к сложным конструкциям при произвольном нагружении.

Для решения задачи прочности и устойчивости композитных цилиндрических оболочек при нагружении краевой поперечной силой применены методы конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича. Используются разработанные на основе гипотезы Тимошенко конечных элементов (КЭ) композитных цилиндрических оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены их жесткие

перемещения (перемещения КЭ как твердого тела).

Исследован отсек фюзеляжа перспективного пассажирского самолета в виде консольно заземленной круговой анизогридной цилиндрической оболочки в широком диапазоне изменения параметров ее жесткости.

Цель работы — исследование влияния жесткости подкрепляющего набора и углов укладки стрингерного набора на устойчивость оболочки в условиях нелинейного исходного НДС.

Результаты исследований получены с помощью программного комплекса «Программа для расчета на прочность и устойчивость подкрепленных некруговых цилиндрических оболочек», зарегистрированного в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013615613 от 17.06.2013 г.).

Основные соотношения для КЭ некруговой цилиндрической оболочки, выполненной из полимерного композиционного материала (ПКМ), и алгоритмы решения задачи ее прочности и устойчивости в условиях нелинейного исходного НДС опубликованы в работах [6–8].

**Алгоритм решения нелинейной задачи.** Некруговую цилиндрическую оболочку (далее оболочка) будем рассматривать как ортотропную. Вариационное уравнение Лагранжа для КЭ оболочки представим в виде

$$\delta\Pi = \delta W - \delta V = 0, \quad (1)$$

где  $\delta$  — знак вариации;  $\Pi$ ,  $W$  и  $V$  — потенциальная энергия, энергия деформации и работа внешних сил соответственно.

Варьируя уравнение (1) по узловым перемещениям КЭ, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений КЭ. С учетом условия совместности перемещений в узлах КЭ и граничных условий запишем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений оболочки

$$\mathbf{K}\mathbf{u}' - \mathbf{Q} = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{K}$  — матрица жесткости оболочки, получаемая суммированием матриц жесткости отдельных КЭ с использованием матрицы индексов [9];  $\mathbf{u}'$  — вектор узловых перемещений оболочки;  $\mathbf{Q}$  — вектор обобщенных узловых сил оболочки.

Для решения системы (2) воспользуемся методом Ньютона — Канторовича [10], уравнения которого имеют вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}'_n)\Delta = \mathbf{Q} - \mathbf{G}(\mathbf{u}'_n); \quad \mathbf{G} = \mathbf{K}(\mathbf{u}'_n)\mathbf{u}'_n; \quad (3)$$

$$\mathbf{u}'_{n+1} = \mathbf{u}'_n + \Delta,$$

где  $\mathbf{H}$  — матрица Гессе системы, элементами которой являются элементы второй вариации потенциальной энергии деформации оболочки;  $\mathbf{u}'_n$  и  $\mathbf{u}'_{n+1}$  — векторы узловых перемещений оболочки на  $n$ -й и  $(n + 1)$ -й итерациях;  $\Delta$  — вектор приращений узловых перемещений оболочки;  $\mathbf{G}$  — градиент потенциальной энергии деформации.

Решение системы (3) получаем с помощью метода последовательных приближений и шагового метода по нагрузке. На каждой итерации решение системы линейных алгебраических уравнений отыскиваем методом Краута [11], используя разложение матрицы Гессе  $\mathbf{H} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$  на одну диагональную  $\mathbf{D}$  и две треугольные матрицы  $\mathbf{L}$ .

Определив компоненты вектора узловых перемещений оболочки  $\mathbf{u}'$ , находим все компоненты ее НДС. Критическую нагрузку определяем как предельную по расходимости итерационного процесса при резком возрастании перемещений в отдельных узлах конечно-элементной сетки или как бифуркационную с использованием энергетического критерия устойчивости, согласно которому равновесное состояние является устойчивым, если  $\delta^2\Pi > 0$ .

Это условие требует положительной определенности матрицы Гессе  $\mathbf{H}$  или положительности всех диагональных элементов матрицы  $\mathbf{D}$  в ее разложении  $\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$ . Вычислив критическую нагрузку, находим форму потери устойчивости оболочки из решения системы  $\mathbf{H}\ddot{\mathbf{u}} = 0$ , где  $\ddot{\mathbf{u}}$  — вектор бифуркационных узловых перемещений. В случае предельной точки форму потери устойчивости оболочки определяют из нелинейного исходного НДС для нагрузки, близкой к предельной.

**Исследование нелинейного деформирования и устойчивости отсека фюзеляжа самолета при поперечном изгибе.** Рассмотрим консольно-закрепленную подкрепленную продольным и поперечным наборами оболочку, близкую по форме и размерам поперечного сечения самолета Ту-204 и находящуюся под действием краевой поперечной силы, приложенной к ее свободному краю. Нагруженный край оболочки

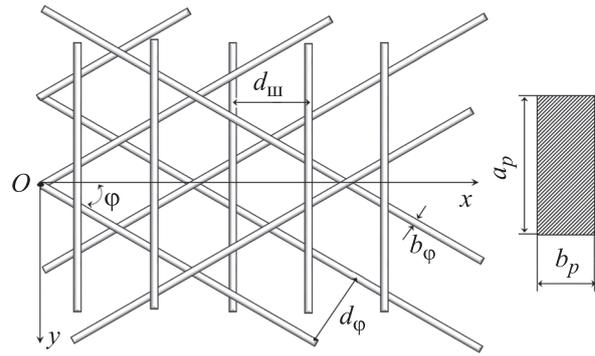


Рис. 1. Схема расположения подкреплений в оболочке

подкреплена жестким в своей плоскости шпангоутом.

Действие поперечной силы заменим статически эквивалентными ей касательными усилиями  $T_3 = QS/J$ , где  $S$  — статический момент отсеченной части поперечного сечения оболочки;  $J$  — момент инерции площади поперечного сечения относительно горизонтальной плоскости симметрии оболочки.

Оболочка длиной  $L = 2000$  мм и радиусом  $R = 2000$  мм подкреплена равностоящим подкрепляющим набором (прямоугольного поперечного сечения) различной жесткости (рис. 1). Обшивка оболочки выполнена из слоистого ПКМ Тогауса Т700, механические характеристики монослоя которого приведены в работе [12].

Жесткостные характеристики слоистого материала обшивки получены с использованием следующих формул [13]:

$$B_{11} = \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \cos^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \sin^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k - z_{k-1});$$

$$B_{22} = \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \sin^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \cos^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k - z_{k-1});$$

$$B_{12} = B_{21} = \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \left( \sin^4 \varphi_k + \cos^4 \varphi_k \right) - G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right] \times (z_k - z_{k-1});$$

$$D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \cos^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \sin^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k^3 - z_{k-1}^3);$$

$$D_{22} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \sin^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \cos^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k^3 - z_{k-1}^3);$$

$$\begin{aligned}
D_{12} = D_{21} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + \right. \\
&+ E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \left( \sin^4 \varphi_k + \cos^4 \varphi_k \right) - G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \left. \right] \times \\
&\quad \times \left( z_k^3 - z_{k-1}^3 \right); \\
K_{11} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \cos^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + \right. \\
&+ E_2^{(k)} \sin^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \left. \right) \left( z_k^2 - z_{k-1}^2 \right); \\
K_{22} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \sin^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + \right. \\
&+ E_2^{(k)} \cos^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \left. \right) \left( z_k^2 - z_{k-1}^2 \right); \\
K_{12} = K_{21} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + \right. \\
&+ E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \left( \sin^4 \varphi_k + \cos^4 \varphi_k \right) - G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \left. \right] \times \\
&\quad \times \left( z_k^2 - z_{k-1}^2 \right); \\
B_{13} = B_{31} &= \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \cos \varphi_k \left[ E_1^{(k)} \left( 1 - \mu_{21}^{(k)} \right) \cos^2 \varphi_k - \right. \\
&- 2G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k - E_2^{(k)} \left( 1 - \mu_{12}^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \left. \right] \left( z_k - z_{k-1} \right); \\
B_{23} = B_{32} &= \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \cos \varphi_k \left[ E_1^{(k)} \left( 1 - \mu_{21}^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k + \right. \\
&+ 2G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k - E_2^{(k)} \left( 1 - \mu_{12}^{(k)} \right) \cos^2 \varphi_k \left. \right] \left( z_k - z_{k-1} \right); \\
K_{13} = K_{31} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \cos \varphi_k \left[ E_1^{(k)} \left( 1 - \mu_{21}^{(k)} \right) \cos^2 \varphi_k - \right. \\
&- 2G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k - E_2^{(k)} \left( 1 - \mu_{12}^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \left. \right] \left( z_k^2 - z_{k-1}^2 \right); \\
K_{23} = K_{32} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \cos \varphi_k \left[ E_1^{(k)} \left( 1 - \mu_{21}^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k + \right. \\
&+ 2G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k - E_2^{(k)} \left( 1 - \mu_{12}^{(k)} \right) \cos^2 \varphi_k \left. \right] \left( z_k^2 - z_{k-1}^2 \right); \\
B_{33} &= \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} - 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} + G_{12}^{(k)} \right) \times \right. \\
&\times \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k \left. \right] \left( z_k - z_{k-1} \right); \\
K_{33} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} - 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} + G_{12}^{(k)} \right) \times \right. \\
&\times \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k \left. \right] \left( z_k^2 - z_{k-1}^2 \right); \\
D_{33} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} - 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} + G_{12}^{(k)} \right) \times \right. \\
&\times \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k \left. \right] \left( z_k^3 - z_{k-1}^3 \right),
\end{aligned}$$

где  $k$  — номер слоя обшивки;  $E_1^{(k)}$  и  $E_2^{(k)}$  — продольный и поперечный модули упругости  $k$ -го монослоя ПКМ;  $\varphi_k$  — угол укладки монослоя относительно продольной оси оболочки;  $G_{12}^{(k)}$  — модуль сдвига  $k$ -го монослоя ПКМ;  $z_k$  и  $z_{k-1}$  — верхняя и нижняя координаты  $k$ -го монослоя ПКМ.

Подкрепления в оболочке, представленные в виде наклонных под углом  $\varphi$  (стрингеров) и окружающих (шпангоутов) ребер (см. рис. 1), равномерно распределены по ее поверхности с фиксированным шагом  $d_\varphi$  для стрингеров и  $d_{ш}$  для шпангоутов. В разработанном конечно-элементном алгоритме рассмотрена конструктивно-ортотропная схема расположения подкреплений.

Подкрепления выполнены из ПКМ с односторонней укладкой волокон, получаемой путем специальной спиральной непрерывной намотки, в результате чего создана так называемая анизотропная оболочка. Модуль упругости и модуль сдвига приняты равными 90 000 и 4000 МПа соответственно. Все расчеты проведены для случая внутреннего расположения подкреплений относительно обшивки оболочки.

Жесткостные характеристики приведенного набора подкреплений получаем с учетом их приведения к срединной поверхности обшивки по следующим формулам [14]:

$$B_{11p} = E_p a_p b_p / d_p \cos^4 \varphi;$$

$$B_{22p} = E_p a_p b_p / d_p \sin^4 \varphi;$$

$$B_{12p} = E_p a_p b_p / d_p \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi;$$

$$B_{33p} = G_p a_p b_p / d_p \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi;$$

$$D_{11p} = E_p a_p b_p / d_p \left( a_p^2 / 12 + e_p^2 \right) \cos^4 \varphi;$$

$$D_{22p} = E_p a_p b_p / d_p \left( a_p^2 / 12 + e_p^2 \right) \sin^4 \varphi;$$

$$D_{12p} = E_p a_p b_p / d_p \left( a_p^2 / 12 + e_p^2 \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi;$$

$$D_{33p} = G_p a_p b_p / d_p \left( a_p^2 / 12 + e_p^2 \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi;$$

$$K_{11p} = E_p a_p b_p e_p / d_p \cos^4 \varphi;$$

$$K_{22p} = E_p a_p b_p e_p / d_p \sin^4 \varphi;$$

$$K_{12p} = E_p a_p b_p e_p / d_p \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi;$$

$$K_{33p} = G_p a_p b_p e_p / d_p \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi,$$

где  $E_p$  и  $G_p$  — модули упругости и сдвига подкрепления;  $a_p$ ,  $b_p$  и  $d_p$  — высота, ширина и шаг подкрепления соответственно;  $\varphi$  — угол укладки монослоев в подкреплении относительно продольной оси оболочки (далее угол наклона подкреплений);  $e_p$  — эксцентриситет подкрепления относительно срединной поверхности обшивки.

При расчете оболочки для ортогонального подкрепления будем использовать известные формулы для конструктивно-ортотропной оболочки [15].

Таблица 1

## Варианты укладки монослоев обшивки

Вариант	Укладка	$h$ , мм
1	$0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ$	0,768
2	$0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ$	1,152
3	$0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ$	1,728
4	$0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$	2,304

Будем рассматривать четыре варианта укладки монослоев обшивки, приведенных в табл. 1, где  $h$  — толщина обшивки.

Согласно рис. 1, имеем

$$d_{\text{ш}} = \frac{2\pi R}{n \operatorname{tg} \varphi}; \quad d_{\varphi} = 4 \frac{\pi R \cos \varphi}{n},$$

где  $n$  — количество наклонных ребер (стрингеров).

Будем рассматривать несколько вариантов жесткостных характеристик подкреплений (табл. 2) и углов наклона подкреплений (табл. 3) стрингеров, где  $J_p$  — жесткость подкрепляющего набора,  $J_p = b_p a_p^3 / 12$ .

Таблица 2

## Приведенные характеристики подкреплений

Вариант	$a_p$ , мм	$b_p$ , мм	$J_p$ , мм <sup>4</sup>
1	0	0	0
2	10	5	417
3	15	5	1406
4	20	5	3333
5	25	5	6510
6	30	5	11 250

Таблица 3

## Значения углов наклона и шагов расположения подкреплений

Вариант	$\varphi$ , град	$d_{\varphi}$ , мм	$d_{\text{ш}}$ , мм
1	$\pm 20,9$	295,21	431,57
2	$\pm 25,9$	284,72	336,86
3	$\pm 30,9$	272,07	272,07
4	$\pm 35,9$	257,34	224,33
5	$\pm 40,9$	240,66	187,20
6	$\pm 45,9$	222,14	157,08
7	$\pm 50,9$	201,94	131,81

Оболочку разбиваем конечно-элементной сеткой  $m \times n = 14 \times 100$ , что обеспечивает сходимость решения по числу КЭ, где  $m$  и  $n$  — число КЭ по образующей и направляющей оболочке.

Введем следующие обозначения:

$$k_{\tau} = Q^*/Q_0; \quad \underline{k}_{\tau} = Q^*/\underline{Q}_0; \quad \bar{k}_{\tau} = k_{\tau}/k_{\tau 1}.$$

Здесь  $Q^*$  — критическое значение поперечной силы;  $k_{\tau}$  — параметр, определяемый отношением критических нагрузок композитной оболочки к металлической конструктивно-ортоотропной оболочки с одинаковыми характеристиками поперечного сечения подкреплений;  $Q_0$  и  $\underline{Q}_0$  — верхние критические значения поперечной силы для неподкрепленных металлических оболочек толщиной  $h$  и  $h_p$ ,

$$Q_0 = \pi R C S_b; \quad \underline{Q}_0 = \pi R C \underline{S}_b,$$

где  $C = 0,953$ ;

$$S_b = 0,74 \frac{Eh}{(1-\nu^2)^{5/8}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/4} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2};$$

$$\underline{S}_b = 0,74 \frac{Eh_p}{(1-\nu^2)^{5/8}} \left(\frac{h_p}{R}\right)^{5/4} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2};$$

$$h_p = h + \sum_{i=1}^3 a_{pi} b_{pi} / d_{pi}$$

( $E$  и  $\nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона металлической оболочки [15]).

Зависимости параметра  $k_{\tau}$  от жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  для линейного и нелинейного исходных НДС композитной оболочки толщиной  $h = 0,768; 1,152; 1,728$  и  $2,304$  мм при различных значениях угла наклона подкреплений  $\varphi$  приведены на рис. 2, а–г. Номера кривых соответствуют вариантам, указанным в табл. 3.

Как видно из рис. 2, с увеличением жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  критические значения параметра  $k_{\tau}$  растут, что наиболее существенно для больших углов наклона подкреплений  $\varphi$ . Это обусловлено тем, что с ростом угла  $\varphi$  возрастет приведенная толщина оболочки  $h_p$ , а следовательно, и критическая нагрузка  $Q^*$ . С повышением параметра жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  интенсивность роста параметра  $k_{\tau}$  снижается независимо от толщины обшивки оболочки  $h$ . При увеличении толщины  $h$  критические значения параметра  $k_{\tau}$  существенно уменьшаются: до 8 раз ( $k_{\tau} = 320$  для  $h = 0,768$  мм и  $k_{\tau} = 40$  для  $h = 2,308$  мм. Влияние

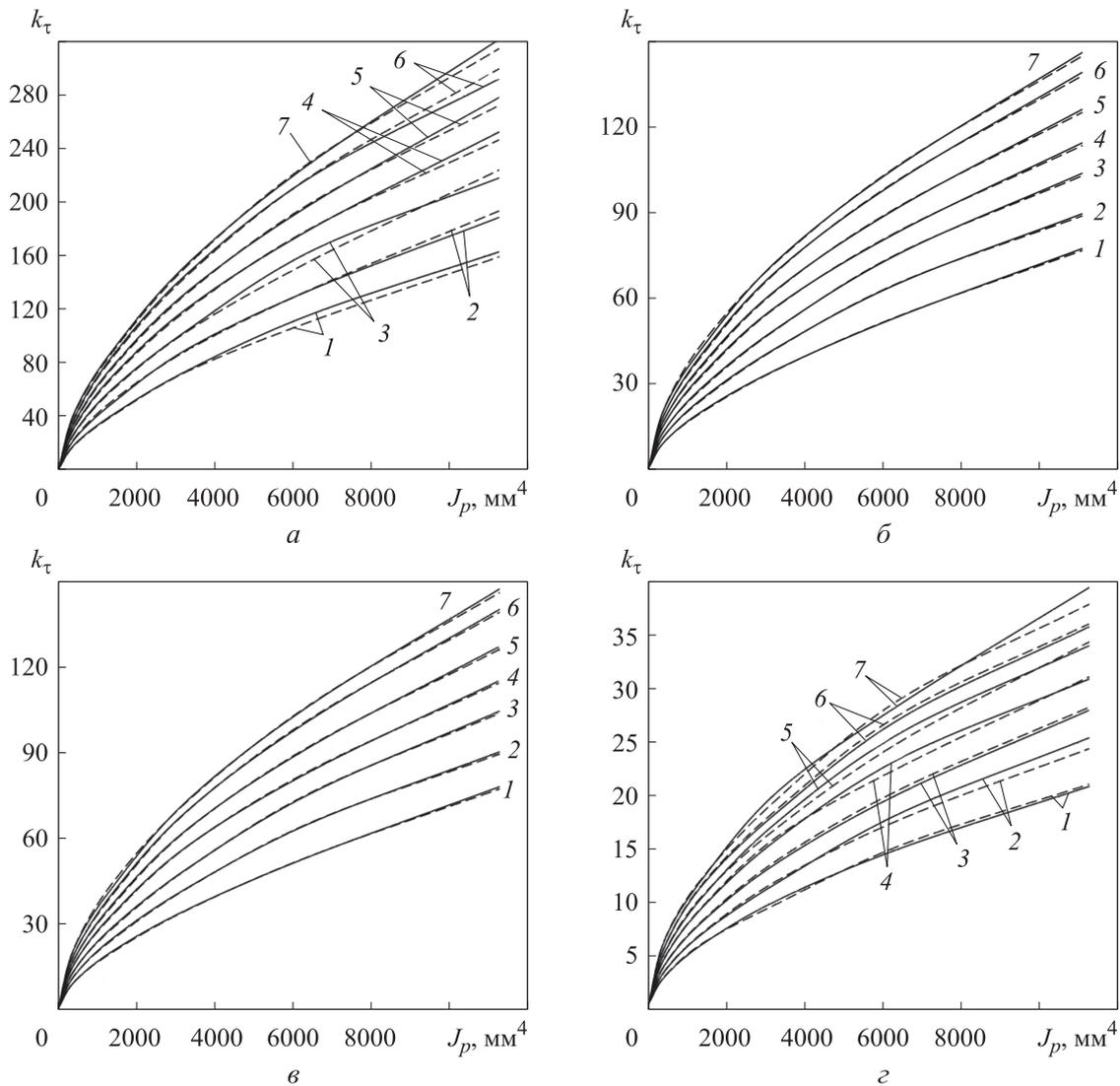


Рис. 2. Зависимости параметра  $k_\tau$  от жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  для линейного (—) и нелинейного (---) исходных НДС композитной оболочки толщиной  $h = 0,768$  (а),  $1,152$  (б),  $1,728$  (в) и  $2,304$  мм (г) при различных значениях угла наклона подкреплений  $\varphi$

нелинейности исходного состояния НДС на критические значения параметра  $k_\tau$  незначительное, в пределах 4 %. Нелинейный расчет, как правило, понижает критическую нагрузку.

Зависимости параметра  $k_\tau$  от жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  для линейного и нелинейного исходных НДС композитной оболочки толщиной  $h = 0,768; 1,152; 1,728$  и  $2,304$  мм при различных значениях угла наклона подкреплений  $\varphi$  приведены на рис. 3, а–г. Номера кривых соответствуют вариантам, указанным в табл. 3.

С увеличением толщины  $h$  критические значения параметра  $k_\tau$  уменьшаются, но не так существенно, как для параметра  $k_\tau$ : до 50 % относительно результатов расчета оболочки с

меньшей толщиной  $h = 0,768$  мм. Это обусловлено тем, что в состав знаменателя для параметра  $k_\tau$  входит параметр  $Q_0$ , напрямую зависящий от приведенной толщины оболочки  $h_p$ . Кроме того, для значения параметра изгибной жесткости подкреплений  $J_p > 4000$  мм<sup>4</sup> его влияние на параметр  $k_\tau$  существенно снижается. Нелинейность в большинстве случаев приводит к уменьшению критических значений параметра  $k_\tau$ . Влияние нелинейности колеблется в диапазоне 0,5...4,0 %.

При тех же параметрах  $a_p$  и  $b_p$  поперечного сечения подкреплений и толщине, что и у композитных оболочек, выполнены расчеты для металлической оболочки. Расчетные зависимости параметра  $k_\tau$  от жесткости подкреп-

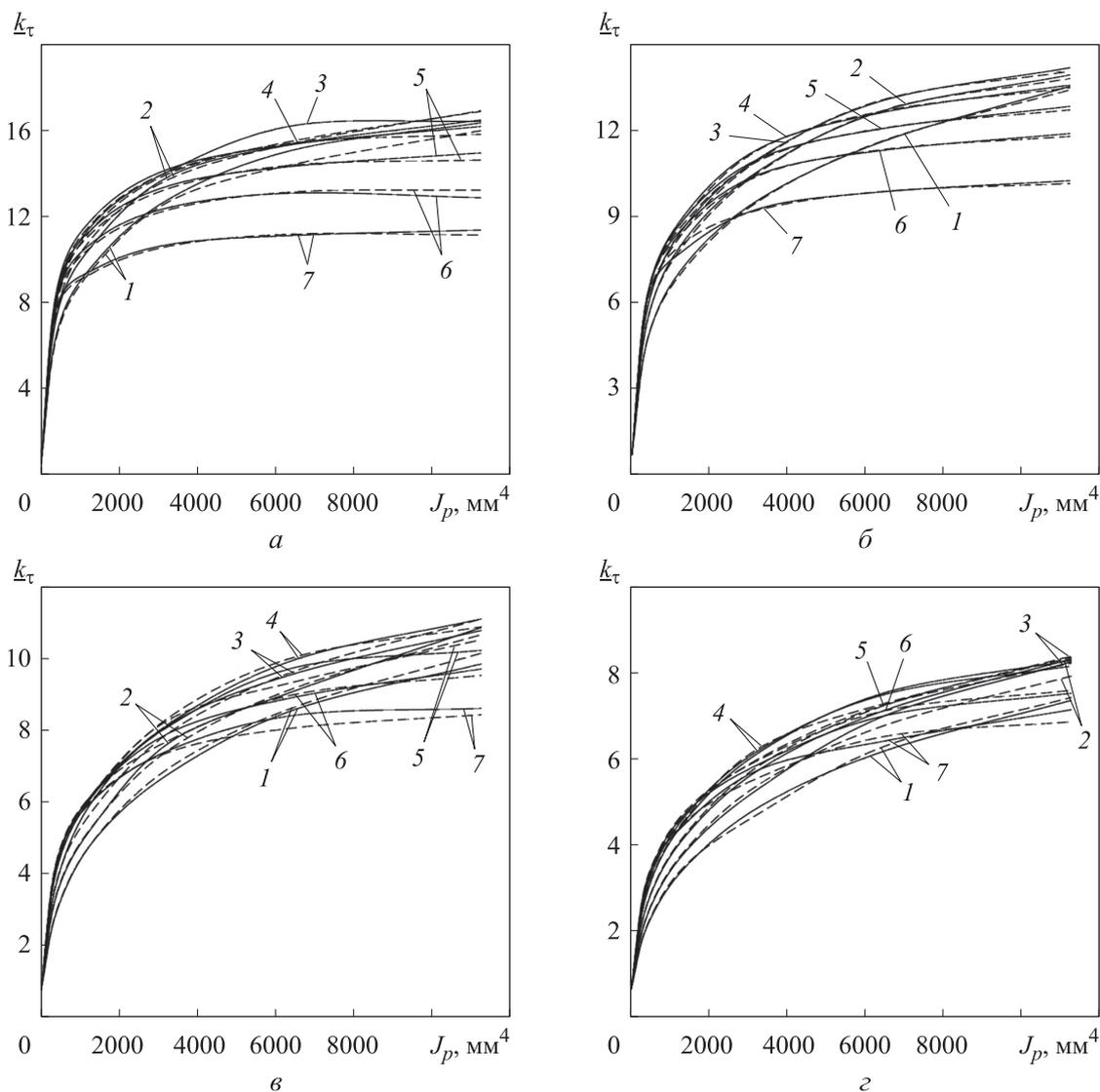


Рис. 3. Зависимости параметра  $\bar{k}_\tau$  от жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  для линейного (—) и нелинейного (---) исходных НДС композитной оболочки толщиной  $h = 0,768$  (а),  $1,152$  (б),  $1,728$  (в) и  $2,304$  мм (г) при различных значениях угла наклона подкреплений  $\varphi$

ляющего набора  $J_p$  для линейного и нелинейного исходных НДС металлической оболочки толщиной  $h = 0,768; 1,152; 1,728$  и  $2,304$  мм приведены на рис. 4. Подкрепления в этом случае ортогональны линиям главных кривизн оболочки, рассматриваемой как конструктивно-ортотропной.

С увеличением жесткости подкрепляющего набора наибольшее повышение критических значений параметра  $k_\tau$  наблюдается при малых значениях жесткости подкрепляющего набора ( $J_p < 1000 \text{ мм}^4$ ). Влияние нелинейности на параметр  $k_\tau$  — незначительное.

Зависимости параметра  $\bar{k}_\tau$  от жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  для линейного и нелинейного исходных НДС композитной обо-

лочки толщиной  $h = 0,768; 1,152; 1,728$  и  $2,304$  мм при различных значениях угла наклона подкреплений  $\varphi$  приведены на рис. 5, а-г. Номера кривых соответствуют вариантам, указанным в табл. 3.

Видно, что жесткость подкрепляющего набора практически не влияет на параметр  $\bar{k}_\tau$ , достаточно существенные изменения  $\bar{k}_\tau$  наблюдаются лишь в малом диапазоне  $J_p = 0 \dots 1000 \text{ мм}^4$ . Влияние нелинейности на параметр  $\bar{k}_\tau$  в большинстве случаев расчета составляет 3...10 %. С увеличением толщины оболочки  $h$  критические значения параметра  $\bar{k}_\tau$  незначительно повышаются (в пределах 5 %). При малой толщине ( $h < 1,152$  мм) критические нагрузки композитных оболочек оказались ни-

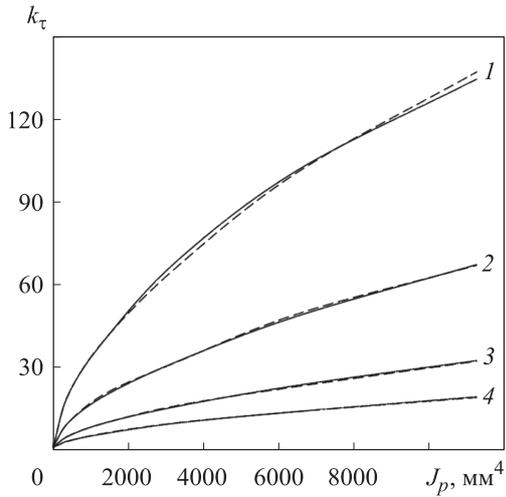


Рис. 4. Зависимости параметра  $k_\tau$  от жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  для линейного (—) и нелинейного (---) исходных НДС металлической оболочки толщиной  $h = 0,768$  (1), 1,152 (2), 1,728 (3) и 2,304 мм (4)

же, чем у металлических. С ростом жесткости подкрепляющего набора эффективность композитных оболочек сначала повышается, а при  $J_p > 2000 \text{ мм}^4$  снижается (наиболее существенно для малых толщин оболочки).

Зависимости параметра  $\bar{k}_\tau$  от угла наклона подкреплений  $\varphi$  для линейного и нелинейного исходных НДС композитной оболочки толщиной  $h = 0,768; 1,152; 1,728$  и  $2,304$  мм при различных значениях жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  приведены на рис. 6, а-г. Номера кривых соответствуют вариантам, указанным в табл. 2.

Видно, что оптимальными являются углы наклона подкреплений  $\varphi = 35 \dots 50^\circ$ . Влияние нелинейности на параметр  $\bar{k}_\tau$  в большинстве случаев расчтета небольшое (1...5 %) и зависит как от угла наклона подкреплений, так и от толщины  $h$  и жесткости  $J_p$ .

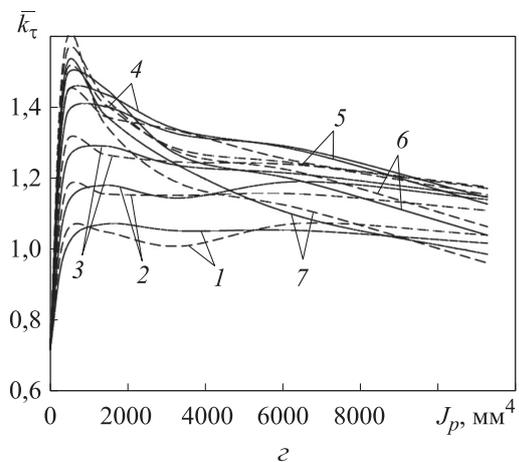
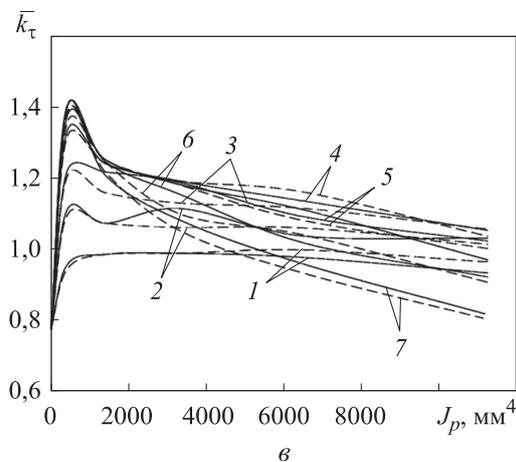
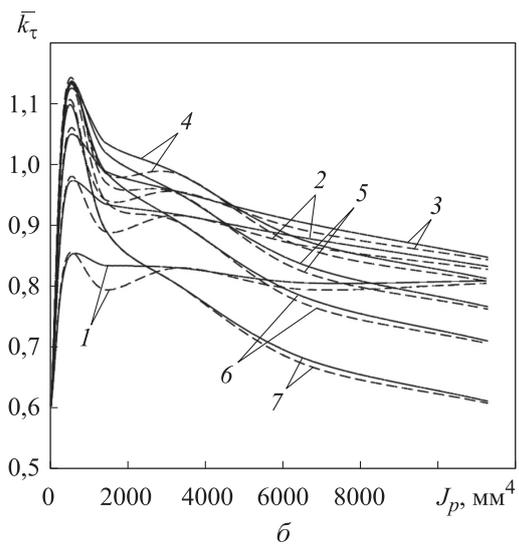
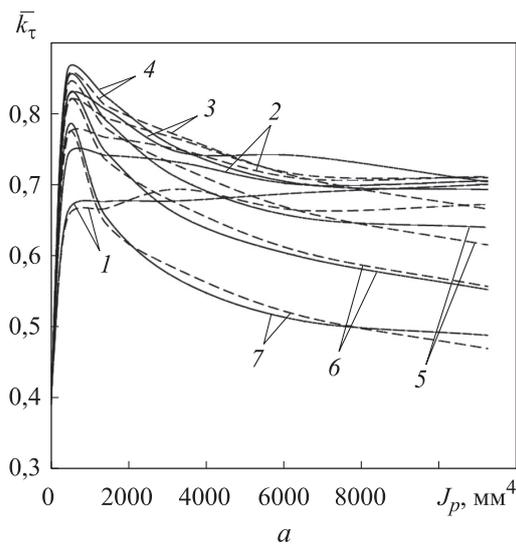


Рис. 5. Зависимости параметра  $\bar{k}_\tau$  от жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  для линейного (—) и нелинейного (---) исходных НДС композитной оболочки толщиной  $h = 0,768$  (а), 1,152 (б), 1,728 (в) и 2,304 мм (г) при различных значениях угла наклона подкреплений  $\varphi$

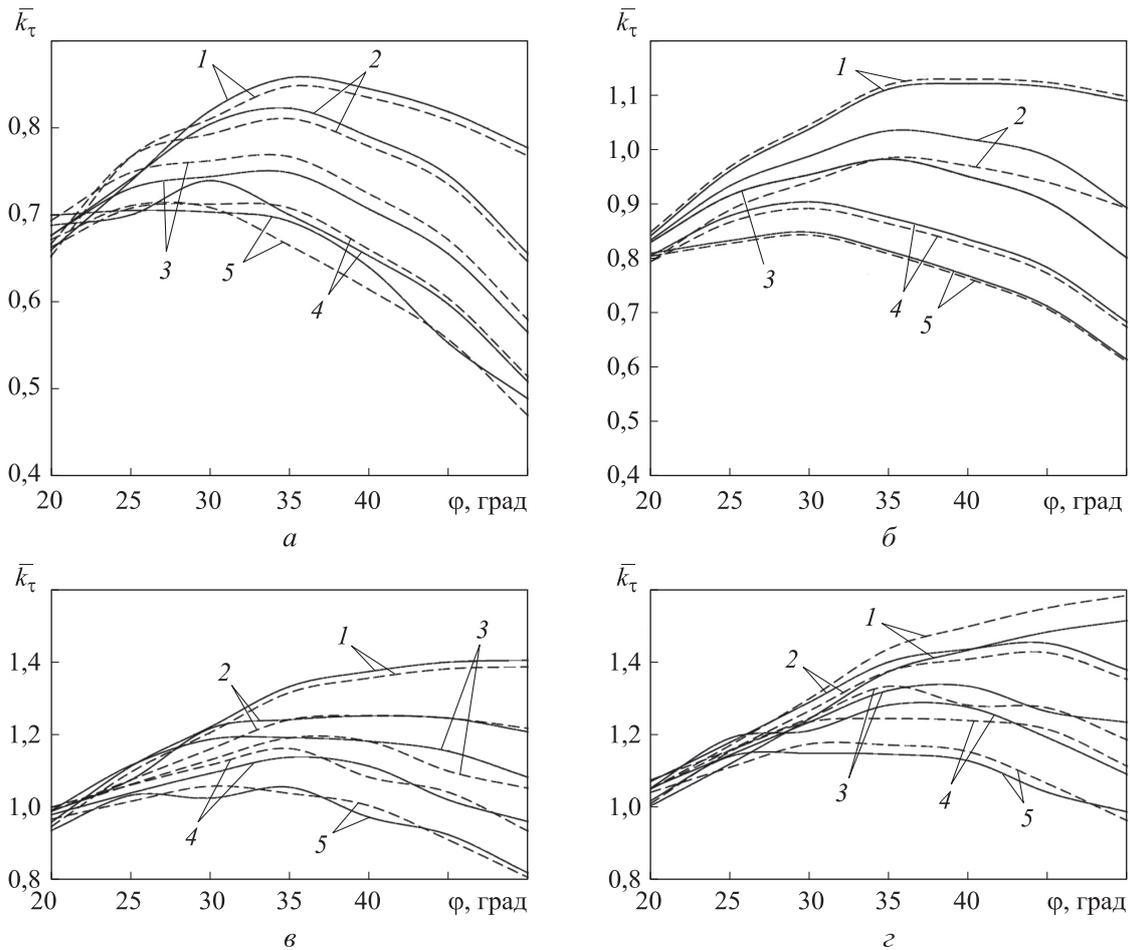


Рис. 6. Зависимости параметра  $\bar{k}_\tau$  от угла наклона подкреплений  $\phi$  для линейного (—) и нелинейного (---) исходных НДС композитной оболочки толщиной  $h = 0,768$  (а),  $1,152$  (б),  $1,728$  (в) и  $2,304$  мм (г) при различных значениях жесткости подкрепляющего набора

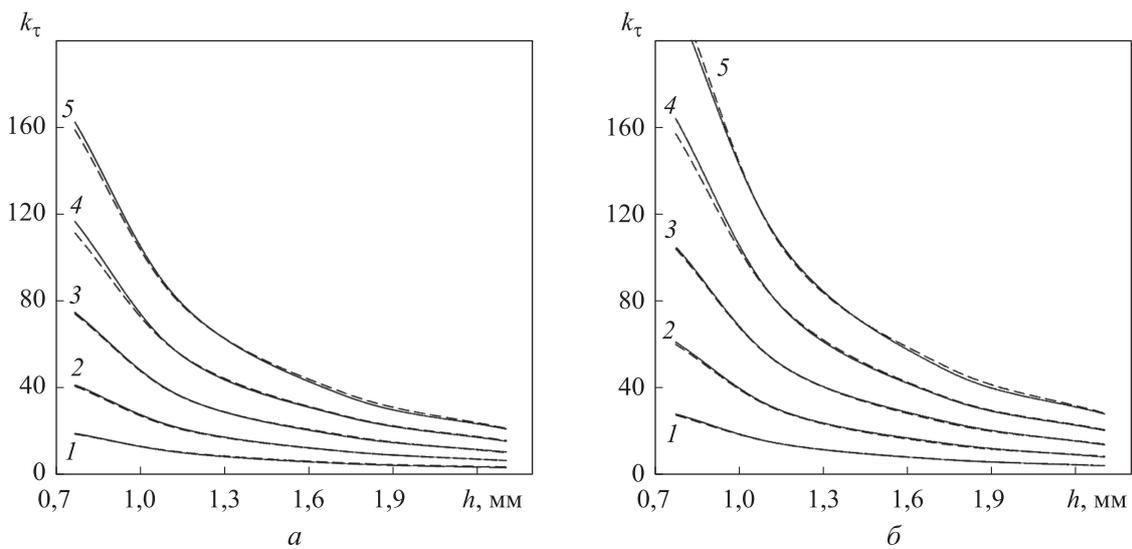


Рис. 7. Зависимости параметра  $k_\tau$  от толщины обшивки  $h$  для линейного (—) и нелинейного (---) исходных НДС композитной оболочки при угле наклона подкреплений  $\phi = \pm 20, 9^\circ$  (а) и  $\pm 30, 9^\circ$  (б) и жесткости подкрепляющего набора  $J_p = 417$  (1),  $1406$  (2),  $3333$  (3),  $6510$  (4) и  $11\,250$  (5) мм<sup>4</sup>

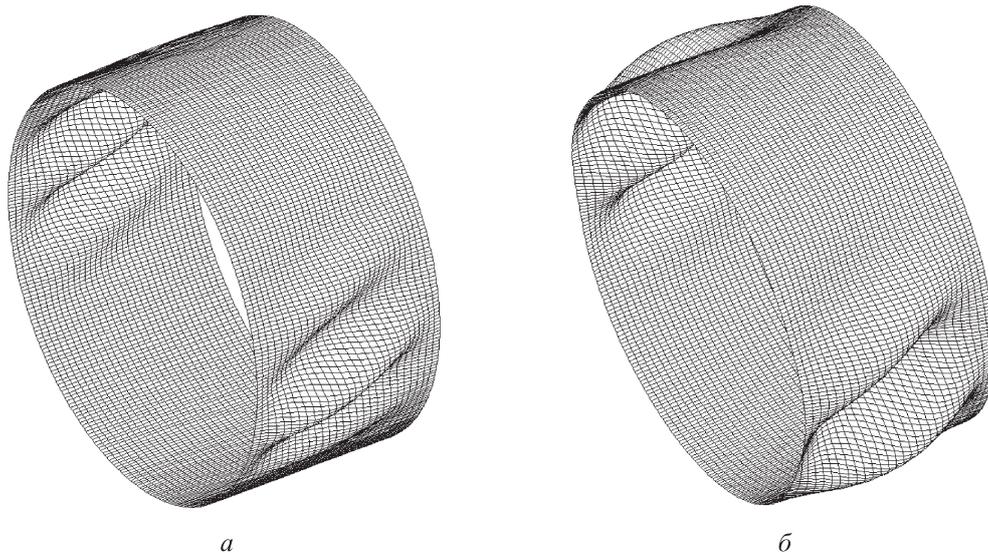


Рис. 8. Формы потери устойчивости композитной оболочки для первого (а) и пятого (б) вариантов подкрепления

Зависимости параметра  $k_{\tau}$  от толщины обшивки  $h$  для линейного и нелинейного исходных НДС композитной оболочки при различных значениях угла наклона подкреплений  $\varphi$  и жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  (см. табл. 2) приведены на рис. 7, а–б.

Видно, с увеличением толщины обшивки  $h$  критические значения параметра  $k_{\tau}$  существенно снижаются, что обусловлено уменьшением приведенной толщины подкрепляющего набора относительно общей приведенной толщины оболочки. Нелинейность также приводит к снижению критических значений параметра  $k_{\tau}$  для любой толщины обшивки  $h$ . Влияние нели-

нейности на параметр  $k_{\tau}$  в большинстве случаев расчета небольшое.

Формы потери устойчивости композитной оболочки толщиной  $h = 1,152$  мм при первом и пятом вариантах подкрепления (см. табл. 2) приведены на рис. 8, а и б. Оболочка теряет устойчивость на боковой поверхности в виде косых складок под действием максимальных касательных усилий  $T_3$  (рис. 9). С уменьшением жесткости подкреплений (первый вариант) число волн по окружности оболочки увеличивается.

## Выводы

1. Критические значения параметра  $k_{\tau}$  существенно зависят как от толщины оболочки, так и от жесткости подкрепляющего набора и угла наклона подкреплений. С увеличением толщины обшивки значения параметра  $k_{\tau}$  существенно (до 8 раз) снижаются.

2. Влияние нелинейности на параметр  $k_{\tau}$  незначительное (в пределах 4 %).

3. Углы наклона подкреплений также влияют на параметр  $k_{\tau}$ . Оптимальной оказалась укладка подкреплений с углами наклона  $35...50^\circ$ .

4. Критические значения параметра нагрузки  $k_{\tau}$  металлических оболочек в основном выше, чем у композитных. Но с учетом меньшей плотности их материала (почти в 2 раза) можно предположить, что композитные оболочки в весовом отношении будут выгоднее металлических.

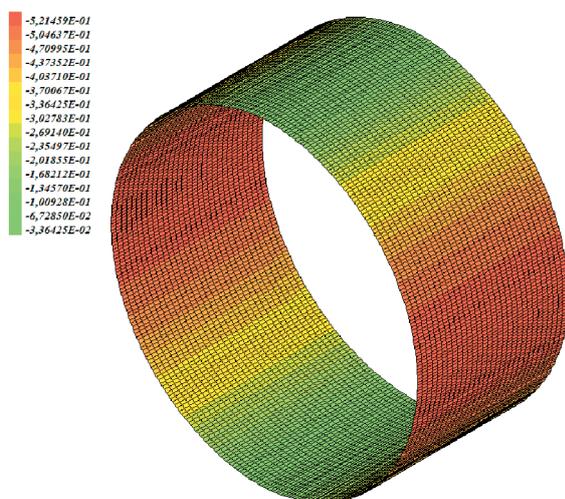


Рис. 9. Распределение касательных усилий  $T_3$ , кг/мм, по поверхности оболочки

## Литература

- [1] Васильев В.В. *Механика конструкций из композитных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988. 272 с.
- [2] Васильев В.В., Бунаков В.А. Проектирование сетчатых композитных цилиндрических оболочек, сжатых в осевом направлении. *Механика конструкций из композиционных материалов*, 2000, № 2, с. 68–77.
- [3] Бакулин В.Н., Виноградов Ю.И. Аналитическое и асимптотическое решение краевых задач механики деформирования оболочек при сосредоточенном нагружении. *Известия ВУЗов. Авиационная техника*, 2017, № 1, с. 14–20.
- [4] Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И. и др. *Статика и динамика оболочечных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1975. 376 с.
- [5] Дмитриев В.Г., Бирюков В.И., Егорова О.В. и др. Нелинейное деформирование многослойных композитных оболочек вращения при больших перемещениях и углах поворота нормали. *Известия ВУЗов. Авиационная техника*, 2017, № 2, с. 8–15.
- [6] Кабанов В.В., Железнов Л.П. К расчету цилиндрической оболочки методом конечных элементов. *Прикладная механика*, 1985, т. 21, № 9, с. 35–38.
- [7] Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении. *СО РАН, ПМТФ*, 2002, т. 43, № 4, с. 155–160.
- [8] Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно-подкрепленных овальных цилиндрических композитных оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2014, № 6, с. 23–30.
- [9] Постнов В.А., Хархурим И.Я. *Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций*. Ленинград, Судостроение, 1974. 341 с.
- [10] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*. Москва, Физматгиз, 1959. 684 с.
- [11] Уилкинсон Д., Райнш К. *Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра*. Москва, Машиностроение, 1976. 390 с.
- [12] Железнов Л.П. Исследование влияния порядка укладки монослоев на устойчивость композитной цилиндрической оболочки. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2022, № 1, с. 71–81, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2022-1-71-81>
- [13] Олегин И.П., Максименко В.Н. *Теоретические основы методов расчета прочности элементов конструкций из композитов*. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2006. 239 с.
- [14] Васильев В.В., Барынин В.А., Разин А.Ф. и др. Анизотридные композитные сетчатые конструкции — разработка и приложение к космической технике. *Композиты и наноструктуры*, 2009, № 3, с. 38–50.
- [15] Кабанов В.В. *Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек*. Москва, Машиностроение, 1982. 253 с.

## References

- [1] Vasilyev V.V. *Mekhanika konstruksiy iz kompozitnykh materialov* [Mechanics of constructions from composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988. 272 p. (In Russ.).
- [2] Vasilyev V.V., Bunakov V.A. Designing of composite mesh cylindrical shells compressed in the axial direction. *Mekhanika konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov*, 2000, no. 2, pp. 68–77. (In Russ.).
- [3] Bakulin V.N., Vinogradov Yu.I. Analytical and asymptotic solution of boundary value problems in the mechanics of deformed shells under concentrated loading. *Izvestiya VUZov. Aviatsionnaya tekhnika*, 2017, no. 1, pp. 14–20. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. Aeronaut.*, 2017, vol. 60, no. 1, pp. 13–20, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068799817010032>)
- [4] Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I. et al. *Statika i dinamika obolochechnykh konstruksiy* [Statics and dynamics of shell construction]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 376 p. (In Russ.).

- [5] Dmitriev V.G., Biryukov V.I., Egorova O.V. et al. Nonlinear deforming of laminated composite shells of revolution under finite deflections and normal's rotation angles. *Izvestiya VUZov. Aviatcionnaya tekhnika*, 2017, no. 2, pp. 8–15. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. Aeronaut.*, 2017, vol. 60, no. 2, pp. 169–176, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068799817020027>)
- [6] Kabanov V.V., Zheleznov L.P. Calculation of cylindrical shells by the finite-element method. *Prikladnaya mekhanika*, 1985, vol. 21, no. 9, pp. 35–38. (In Russ.). (Eng. version: *Sov. Appl. Mech.*, 1985, vol. 21, no. 9, pp. 851–856, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00886970>)
- [7] Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Nonlinear deformation and stability of noncircular cylindrical shells under internal pressure and axial compression. *SO RAN, PMTF*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 155–160. (In Russ.). (Eng. version: *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 617–621, doi: <https://doi.org/10.1023/A:1016066001346>)
- [8] Boyko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Nonlinear deformation and stability of discretely-supported egg-shaped cylindrical composite shells under transversal bending and internal pressure. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2014, no. 6, pp. 23–30. (In Russ.). (Eng. version: *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2014, vol. 43, no. 6, pp. 470–476, doi: <https://doi.org/10.3103/S1052618814060181>)
- [9] Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya. *Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruksiy* [Method of finite elements in calculations of ship structures]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1974. 341 p. (In Russ.).
- [10] Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyy analiz v normirovannykh prostranstvakh* [Functional analysis in normalized spaces]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 684 p. (In Russ.).
- [11] Wilkinson J.H., Reinsch C. *Handbook for automatic computation*. Vol. II. *Linear algebra*. Springer, 2012. 441 p. (Russ. ed.: *Spravochnik algoritmov na yazyke Algol. Lineynaya algebra*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 390 p.)
- [12] Zheleznov L.P. Study of the effect of the monolayers stacking sequence on the composite cylindrical shell stability. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2022, no. 1, pp. 71–81, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2022-1-71-81> (in Russ.).
- [13] Olegin I.P., Maksimenko V.N. *Teoreticheskie osnovy metodov rascheta prochnosti elementov konstruksiy iz kompozitov* [Theoretical bases of methods of calculation of strength of structural elements from composites]. Novosibirsk, Izd-vo NGTU Publ., 2006. 239 p. (In Russ.).
- [14] Vasilyev V.V., Barynin V.A., Razin A.F. et al. Anisogrid composite lattice structures – development and space applications. *Kompozity i nanostrukturny* [Composites and Nanostructures], 2009, no. 3, pp. 38–50. (In Russ.).
- [15] Kabanov V.V. *Ustoychivost neodnorodnykh tsilindricheskikh obolochek* [Stability of inhomogeneous cylindrical shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982. 253 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 28.11.2024

## Информация об авторах

**ЖЕЛЕЗНОВ Лев Петрович** — доктор технических наук, старший научный сотрудник, заместитель начальника отделения усталостной и статической прочности, начальник аспирантуры. ФАУ «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина» (630051, Новосибирск, Российская Федерация, ул. Ползунова, д. 21, e-mail: [Zgeleznov@sibnia.ru](mailto:Zgeleznov@sibnia.ru)).

## Information about the authors

**ZHELEZNOV Lev Petrovich** — Doctor of Science (Eng.), Senior Researcher, Deputy Head of the Department of Fatigue and Static Strength, Head of the Postgraduate Department. Chaplygin Siberian Scientific Research Institute of Aviation (630051, Novosibirsk, Russian Federation, Polzunova St., Bldg. 21, e-mail: [Zgeleznov@sibnia.ru](mailto:Zgeleznov@sibnia.ru)).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Железнов Л.П. Нелинейное деформирование и устойчивость анизогридных круговых цилиндрических оболочек при поперечном изгибе. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 9, с. 113–124.

### Please cite this article in English as:

Zheleznov L.P. Nonlinear deformation and stability of the anisogrid circular cylindrical shells under transverse bending. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 9, pp. 113–124.