

# Машиностроение и машиноведение

УДК 531.8, 621.01

## Скоростной и силовой анализ кинематически избыточного плоского механизма параллельной структуры с интегрированным схватом

Е.М. Исполов<sup>1</sup>, П.А. Ларюшкин<sup>2</sup>, Ю.В. Сеницына<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана

## Velocity and force analysis of a kinematically redundant planar parallel structure mechanism with the integrated gripper

E.M. Ispolov<sup>1</sup>, P.A. Laryushkin<sup>2</sup>, Yu.V. Sinitsyna<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University

Рассмотрен плоский кинематически избыточный механизм с кинематическими цепями PRR. Механизм имеет возможность перемещения выходного звена в плоскости, а также дополнительную управляемую подвижность в виде изменения его длины, которую можно использовать для захвата объектов без необходимости установки дополнительных приводов на выходное звено. Проведен скоростной и силовой анализ механизма с использованием матрицы Якоби из условия максимизации приводных скоростей и усилий при заданных значениях скорости перемещения выходного звена и внешней нагрузки соответственно. Предложен способ определения максимально достижимой силы на схвате для заданных силовых характеристик привода.

EDN: NSUIKJ, <https://elibrary/nsuikj>

**Ключевые слова:** механизм параллельной структуры, плоский механизм, кинематическая избыточность, силовой анализ, скоростной анализ

The paper considers a planar kinematically redundant mechanism with the PRR kinematic chains. The mechanism is capable of displacing the output link in a plane, and has additional controlled mobility in the form of alteration in its length, which could be used to grip objects without the need for additional drives installed on the output link. The paper provides results of the mechanism velocity and force analysis conducted using the Jacobian matrix assuming maximization of the velocities and forces for given values of the output link velocity and external load, respectively. The paper proposes a method for determining the maximum achievable force on a gripper for the given drive force characteristics.

EDN: NSUIKJ, <https://elibrary/nsuikj>

**Keywords:** parallel structure mechanism, planar mechanism, kinematic redundancy, force analysis, velocity analysis

Среди рычажных механизмов, в том числе имеющих параллельную кинематическую структуру, особое место занимают так называемые плоские механизмы, у которых выходное звено (ВЗ) может перемещаться только в одной плоскости. Несмотря на то, что плоские механизмы параллельной структуры (МПС) известны еще с древности [1], и в настоящее время значительное количество научных работ посвящено вопросам синтеза, анализа и проектирования устройств на базе подобных механизмов [2–10].

Плоские МПС чаще всего выступают в качестве прецизионных позиционирующих устройств (столов). Примером таких устройств являются механизмы NAF3 производства компании Niphaist Seiko. В частности, модель NAF3C-40 обладает точностью позиционирования около 2,8 мкм. В качестве альтернативы такому роботу исследователями из Высшей технологической школы университета Квебека во главе с И. Боневым предложен механизм PreXYT [11] с несимметричными кинематическими цепями, что позволило увеличить его рабочую зону.

Помимо известных преимуществ перед классическими механизмами последовательной структуры МПС имеют ряд недостатков. В частности, у МПС, как правило, меньше размеры рабочей зоны, а также они могут попадать в так называемые особые положения (ОП), где происходит нежелательное мгновенное изменение подвижности [12].

Для устранения указанных недостатков можно использовать кинематическую или приводную избыточность [13]. В первом случае МПС получает дополнительную управляемую подвижность, которая, как правило, предназначена для увеличения рабочей зоны, либо для избегания ОП. Приводная же избыточность подразумевает применение дополнительных приводов без введения новой подвижности, что позволяет, например, переходить через точки ОП.

Однако лишь относительно небольшое количество исследований посвящено возможности использования дополнительной подвижности при кинематической избыточности для технологических действий разного рода. В качестве примера можно привести предложенный группой под руководством К. Госслена МПС, где дополнительная подвижность, заключающаяся в возможности относительного

вращения двух половин ВЗ, позволяла осуществлять захват и перемещение объектов [14].

Цель работы — исследование плоского кинематически избыточного МПС с линейными приводами.

Дополнительная подвижность реализована в виде контролируемого изменения длины ВЗ, благодаря чему его можно использовать в качестве схвата. Это позволяет не применять для операций захвата дополнительные приводы непосредственно на ВЗ и тем самым не увеличивать его массу.

**Исследуемый механизм.** Так как данная работа является логическим продолжением и развитием исследований, описанных в статье [15], целесообразно кратко изложить полученные в ней основные результаты, являющиеся основой для проводимого анализа.

Исследуемый кинематически избыточный плоский механизм (рис. 1) включает в себя четыре кинематические цепи  $\underline{PRR}$ , где буква «P» обозначает призматическую кинематическую пару, «R» — вращательную, а подчеркивание буквы «P» указывает, что пара является приводной. Эти цепи объединены в два плоских лямбда-механизма. Каждая кинематическая цепь содержит приводную призматическую пару  $A_{ij}$  и две пассивные вращательные пары  $B_{ij}$  и  $C_i$ , где  $i$  — номер лямбда-механизма,  $i = 1, 2$ ;  $j$  — номер цепи  $\underline{PRR}$  в составе механизма,  $j = 1, 2$ . Оси всех призматических пар совпадают. Также в точках  $C_i$  соосно общим кинематическим параметрам цепей  $\underline{PRR}$  расположены крайние кинематические пары схватывающего устройства, реализованного в виде диады RPR.

Структура МПС позволяет путем изменения координат  $x_{A_{ij}}$  призматических пар (кареток) реализовывать движение ВЗ (отрезка  $C_1C_2$ ) в плоскости  $Oxy$ . Положение и ориентацию ВЗ описывают координаты точки  $D$   $x_D, y_D$  и угол поворота  $\varphi$ . Также МПС обеспечивает возмож-

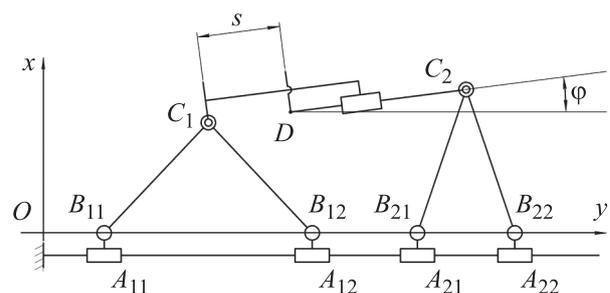


Рис. 1. Схема исследуемого механизма

ность изменения расстояния между поверхностями схвата  $s$  (длины отрезка  $C_1D$ ).

Ранее были получены следующие уравнения связи в виде неявных функций  $F_{ij}(x_D, y_D, \varphi, s, x_{Aij})=0$ :

$$\begin{aligned} F_{11} &= (x_{A11} - x_D + s \cos \varphi)^2 + \\ &+ (y_D - s \sin \varphi)^2 - l_{B11C1}^2 = 0; \\ F_{12} &= (x_{A12} - x_D + s \cos \varphi)^2 + \\ &+ (y_D - s \sin \varphi)^2 - l_{B12C1}^2 = 0; \\ F_{21} &= (x_{A21} - x_D - l_{C2D} \cos \varphi)^2 + \\ &+ (y_D + l_{C2D} \sin \varphi)^2 - l_{B21C2}^2 = 0; \\ F_{22} &= (x_{A22} - x_D - l_{C2D} \cos \varphi)^2 + \\ &+ (y_D + l_{C2D} \sin \varphi)^2 - l_{B22C2}^2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $l_{B11C1}$ ,  $l_{B12C1}$ ,  $l_{B21C2}$  и  $l_{B22C2}$  — длина звена механизма  $B_{11}C_1$ ,  $B_{12}C_1$ ,  $B_{21}C_2$  и  $B_{22}C_2$  соответственно.

Из уравнений (1) явным образом выражаются приводные координаты  $x_{Aij}$ , что является решением обратной задачи о положениях:

$$\begin{aligned} x_{A11} &= x_D - s \cos \varphi \mp \sqrt{l_{B11C1}^2 - (y_D - s \sin \varphi)^2}; \\ x_{A12} &= x_D - s \cos \varphi \pm \sqrt{l_{B12C1}^2 - (y_D - s \sin \varphi)^2}; \\ x_{A21} &= x_D + l_{C2D} \cos \varphi \mp \sqrt{l_{B21C2}^2 - (y_D + l_{C2D} \sin \varphi)^2}; \\ x_{A22} &= x_D + l_{C2D} \cos \varphi \pm \sqrt{l_{B22C2}^2 - (y_D + l_{C2D} \sin \varphi)^2}. \end{aligned}$$

Также ранее был сформулирован итерационный алгоритм, который позволяет, используя решение обратной задачи о положениях, оценивать форму и размер рабочей зоны.

**Скоростной анализ механизма.** После решения задачи о положениях и анализа рабочей зоны механизма, как правило, выполняют скоростной и силовой анализ, а также анализ ОП. Все три указанных исследования можно провести, используя винтовое исчисление или матрицу Якоби механизма.

Винтовое исчисление представляется более удобным для анализа механизмов со сложными уравнениями связи, либо, когда возможно вырождение связей [16]. Применение винтового исчисления кинематических избыточных механизмов затруднено ввиду того, что кинематические винты описывают шесть степеней свободы ВЗ в пространстве, но не так удобны для описания локальных подвижностей в МПС. По этой причине будем использовать метод, основан-

ный на исследовании матрицы Якоби и связанных с ней матриц.

Дифференцирование уравнений (1) по времени позволяет связать между собой скорости перемещения ВЗ  $\dot{x}_D$ ,  $\dot{y}_D$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{s}$  и приводных скоростей пар  $\dot{x}_{Ai}$ :

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{x}_D \\ \dot{y}_D \\ \dot{\varphi} \\ \dot{s} \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \dot{x}_{A11} \\ \dot{x}_{A12} \\ \dot{x}_{A21} \\ \dot{x}_{A22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — матрицы размера  $4 \times 4$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_D} & \frac{\partial F_{11}}{\partial y_D} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_{11}}{\partial s} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial x_D} & \frac{\partial F_{12}}{\partial y_D} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_{12}}{\partial s} \\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x_D} & \frac{\partial F_{21}}{\partial y_D} & \frac{\partial F_{21}}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_{21}}{\partial s} \\ \frac{\partial F_{22}}{\partial x_D} & \frac{\partial F_{22}}{\partial y_D} & \frac{\partial F_{22}}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_{22}}{\partial s} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_{A11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{12}}{\partial x_{A12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_{21}}{\partial x_{A21}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_{22}}{\partial x_{A22}} \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы являются составляющими обратной матрицы Якоби исследуемого механизма  $\mathbf{J}^{-1}$ , которую можно получить делением каждой  $k$ -й ( $k = 1, \dots, 4$ ) строки матрицы  $\mathbf{A}$  на соответствующий элемент главной диагонали матрицы  $\mathbf{B}$ , взятый со знаком «-»:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-1} &= \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}/\partial x_D}{\frac{\partial F_{11}}{\partial x_{A11}}} & \frac{\partial F_{11}/\partial y_D}{\frac{\partial F_{11}}{\partial x_{A11}}} & \frac{\partial F_{11}/\partial \varphi}{\frac{\partial F_{11}}{\partial x_{A11}}} & \frac{\partial F_{11}/\partial s}{\frac{\partial F_{11}}{\partial x_{A11}}} \\ \frac{\partial F_{12}/\partial x_D}{\frac{\partial F_{12}}{\partial x_{A12}}} & \frac{\partial F_{12}/\partial y_D}{\frac{\partial F_{12}}{\partial x_{A12}}} & \frac{\partial F_{12}/\partial \varphi}{\frac{\partial F_{12}}{\partial x_{A12}}} & \frac{\partial F_{12}/\partial s}{\frac{\partial F_{12}}{\partial x_{A12}}} \\ \frac{\partial F_{21}/\partial x_D}{\frac{\partial F_{21}}{\partial x_{A21}}} & \frac{\partial F_{21}/\partial y_D}{\frac{\partial F_{21}}{\partial x_{A21}}} & \frac{\partial F_{21}/\partial \varphi}{\frac{\partial F_{21}}{\partial x_{A21}}} & \frac{\partial F_{21}/\partial s}{\frac{\partial F_{21}}{\partial x_{A21}}} \\ \frac{\partial F_{22}/\partial x_D}{\frac{\partial F_{22}}{\partial x_{A22}}} & \frac{\partial F_{22}/\partial y_D}{\frac{\partial F_{22}}{\partial x_{A22}}} & \frac{\partial F_{22}/\partial \varphi}{\frac{\partial F_{22}}{\partial x_{A22}}} & \frac{\partial F_{22}/\partial s}{\frac{\partial F_{22}}{\partial x_{A22}}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из выражения (2) следует, что

$$\mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_D \\ \dot{y}_D \\ \dot{\varphi} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{A11} \\ \dot{x}_{A12} \\ \dot{x}_{A21} \\ \dot{x}_{A22} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Видно, что для решения обратной задачи о скоростях достаточно подставить значения  $\dot{x}_D$ ,  $\dot{y}_D$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{s}$  в выражение (3) и вычислить значения  $\dot{x}_{Aij}$ . Соответственно, для решения прямой задачи о скоростях требуется найти решение системы (3) для заданных значений  $\dot{x}_{Aij}$ .

Наибольший практический интерес представляет решение обратной задачи о скоростях, так как оно позволяет получить значения требуемых скоростей двигателей приводов для заданных значений скорости перемещения ВЗ. При этом значения приводных скоростей будут зависеть не только от абсолютных значений скорости перемещения ВЗ, но и от направления их вектора. Как правило, известны только указанные абсолютные значения, в то время как направление вектора скорости может быть любым. В связи с этим целесообразно проводить анализ из условия максимизации приводных скоростей по методу, предложенному в работе [17].

В общем случае выражение (3) имеет вид

$$\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{q}}, \quad (4)$$

где  $\dot{\mathbf{x}}$  и  $\dot{\mathbf{q}}$  — векторы-столбцы выходных и приводных скоростей.

Пусть и подвижность исследуемого механизма, и количество приводов равны  $n$ . Из выражения (4) следует, что значение  $k$ -й ( $k = 1, \dots, n$ ) приводной скорости  $\dot{q}_k$  равно скалярному произведению вектора  $\dot{\mathbf{x}}$  на вектор  $\mathbf{j}_k^{-1}$ , составленный из элементов  $k$ -й строки матрицы  $\mathbf{J}^{-1}$ . Тогда для некоторого известного постоянного значения нормы  $\|\dot{\mathbf{x}}\| = \text{const}$  максимальное значение  $\dot{q}_k = \dot{q}_{k\text{max}}$  будет соответствовать такому направлению вектора  $\dot{\mathbf{x}}$ , при котором он оказывается коллинеарным вектору  $\mathbf{j}_k^{-1}$ :

$$|\dot{q}_{k\text{max}}| = \|\mathbf{j}_k^{-1}\| \|\dot{\mathbf{x}}\|.$$

Тогда для механизма в целом можно записать

$$|\dot{q}|_{\text{max}} = \max_{k=1\dots n} (|\dot{q}_{k\text{max}}|) = \max_{k=1\dots n} (\|\mathbf{j}_k^{-1}\| \|\dot{\mathbf{x}}\|). \quad (5)$$

Для исследуемого механизма  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_D, \dot{y}_D, \dot{\phi}, \dot{s})^T$ . Так как этот вектор содержит как линейные скорости, так и угловые, применение к нему евклидовой нормы напрямую не имеет физического смысла. В работе [17] показано, что при исследовании максимальных приводных скоростей различные компоненты вектора скорости перемещения ВЗ можно рассмотреть и нормализовать отдельно.

Тогда, для исследуемого механизма выражение (5) принимает следующий вид:

$$|\dot{x}_A|_{\text{max}} = \max_{k=1\dots n} (|\dot{x}_{A(k)}|) = \max_{k=1\dots n} \left( \left[ \sqrt{(j_{k1}^{-1})^2 + (j_{k2}^{-1})^2} \right] v_D + |j_{k3}^{-1}| \omega + |j_{k4}^{-1}| v_s \right), \quad (6)$$

где  $j_{kp}^{-1}$  — элемент  $k$ -й строки  $p$ -го столбца ( $k = 1, \dots, 4$ ,  $p = 1, \dots, 4$ ) обратной матрицы Якоби  $\mathbf{J}^{-1}$ ;  $v_D$  и  $\omega$  — абсолютные линейная и угловая скорости ВЗ;  $v_s$  — скорости раскрытия схвата;  $\dot{x}_{A(1)} = \dot{x}_{A11}$ ,  $\dot{x}_{A(2)} = \dot{x}_{A12}$ ,  $\dot{x}_{A(3)} = \dot{x}_{A21}$ ,  $\dot{x}_{A(4)} = \dot{x}_{A22}$  — приводные скорости.

В качестве примера рассмотрим результаты итерационного анализа с решением обратной задачи о скоростях согласно выражению (6) при  $v_D = 1$  м/с,  $\omega = 1$  рад/с,  $v_s = 1$  м/с,  $s = 0,14$  м и  $\phi = 20^\circ$  (рис. 2). Принимаем следующие геометрические параметры механизма:  $l_{B11C1} = l_{B22C2} = 0,25$  м;  $l_{B12C1} = l_{B21C2} = 0,18$  м;  $l_{C2D} = 0,22$  м; пределы перемещения кареток (изменения координат  $x_{Aij}$ )  $[0; 1,50]$  м. Перебор точек проводим с шагом 0,005 м по координате  $x_D$  в пределах  $[0,2; 1,2]$  м и с шагом 0,0025 м по координате  $y_D$  в пределах  $[-0,25; 0,25]$  м.

Видно, что максимальная скорость перемещения кареток значительно возрастает при приближении к нижней или верхней границе рабочей зоны. Рост приводных скоростей, как правило, наблюдается при приближении к ОП типа ПС [18]. ОП такого типа характеризуются потерей как минимум одной степени свободы ВЗ и практически всегда находятся на границе теоретической рабочей зоны, так как связаны достижением какой-либо цепью максимального удлинения.

В исследуемом механизме для принятых геометрических размеров положение верхней и нижней границ теоретической рабочей зоны будет определяться длиной  $l_{B12C1} = l_{B21C2}$ , так

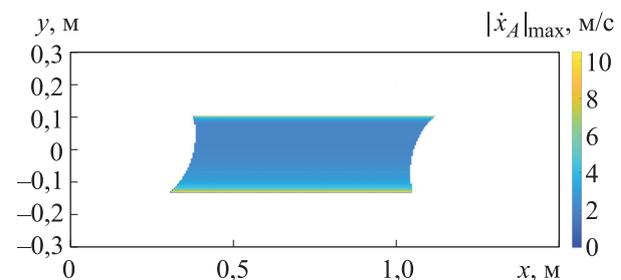


Рис. 2. Распределение максимальной скорости перемещения кареток  $|\dot{x}_A|_{\text{max}}$  по рабочей зоне механизма при расстоянии между поверхностями схвата  $s = 0,14$  м и угле поворота  $\phi = 20^\circ$

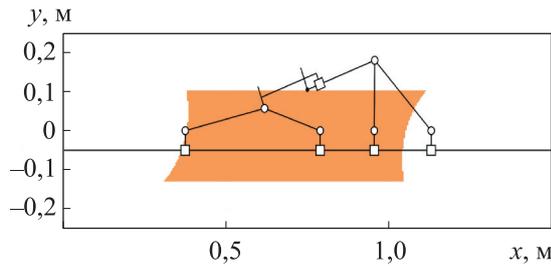


Рис. 3. Рабочая зона и конфигурация механизма в ОП типа ПС на верхней границе (звено  $B_{21}C_2$  приняло вертикальное положение)

как для достижения указанных границ одно из звеньев  $B_{12}C_1$  или  $B_{21}C_2$  должно будет принять вертикальное положение (рис. 3).

Таким образом, как и у подавляющего большинства МПС, на теоретической границе рабочей зоны исследуемого механизма находятся точки ОП типа ПС, при приближении к которым возрастают значения приводных скоростей. Отсутствие точек ОП типа ПС на боковых границах рабочей зоны обусловлено тем, что эти границы определяются конструктивными ограничениями на перемещение кареток, а не геометрическими размерами звеньев МПС.

**Силовой анализ механизма.** Как уже отмечалось, матрицу Якоби можно использовать и для статического силового анализа механизма. В общем случае вектор внешних нагрузок (сил и моментов)  $\mathbf{P}$ , действующих на ВЗ некоторого МПС, связан с вектором приводных усилий  $\mathbf{e}$  через транспонированную матрицу Якоби механизма  $\mathbf{J}^T \|\mathbf{P}\| = \text{const}$  следующим образом [17]:

$$-\mathbf{J}^T \mathbf{P} = \mathbf{e}. \quad (6)$$

Из выражения (6) следует, что усилие  $e_k$  в  $k$ -м приводе является скалярным произведением вектора  $\mathbf{P}$  на  $k$ -ю вектор-строку  $\mathbf{j}_k^T$  матрицы  $\mathbf{J}^T$ . Тогда для заданной постоянной нормы  $\|\mathbf{P}\| = \text{const}$  максимальное приводное усилие  $e_k = e_{k\max}$  будет соответствовать такому направлению вектора  $\mathbf{P}$ , при котором он оказывается коллинеарным вектору  $\mathbf{j}_k^T$ . Следовательно, максимальное усилие в  $k$ -м приводе

$$|e_{k\max}| = \|\mathbf{j}_k^T\| \|\mathbf{P}\|,$$

а в механизме с  $n$  приводами

$$|e|_{\max} = \max_{k=1..n} (|e_{k\max}|) = \max_{k=1..n} (\|\mathbf{j}_k^T\| \|\mathbf{P}\|). \quad (7)$$

Как и в случае со скоростями, обратная задача имеет большее практическое значение при проектировании реальных механизмов, так как

ее решение позволяет сформулировать требования к силовым характеристикам двигателей приводов. При этом выражение (7) позволяет проводить расчет для наихудшего случая внешнего нагружения, максимизирующего приводные усилия. Проблему нормализации вектора  $\mathbf{P}$ , содержащего разные по физическому смыслу величины, можно решить рассмотрением сил и моментов по отдельности.

Для исследуемого механизма абсолютную максимальную силу, возникающую в приводе кареток, можно рассчитать следующим образом:

$$|F_A|_{\max} = \max_{k=1..n} (|F_{A(k)}|) = \max_{k=1..n} \left( \left[ \sqrt{(j_{k1}^T)^2 + (j_{k2}^T)^2} \right] F_D + |j_{k3}^T| T + |j_{k4}^T| F_s \right), \quad (8)$$

где  $j_{kp}^T$  — элемент  $k$ -й строки  $p$ -го столбца матрицы  $\mathbf{J}^T$ ;  $F_D$  и  $T$  — абсолютные сила и момент, приложенные к ВЗ;  $F_s$  — абсолютное усилие на схвате;  $F_{A(1)} = F_{A11}$ ,  $F_{A(2)} = F_{A12}$ ,  $F_{A(3)} = F_{A21}$ ,  $F_{A(4)} = F_{A22}$  — силы на соответствующих каретках.

В качестве примера рассмотрим результаты итерационного анализа рабочей зоны с применением формулы (8) для  $F_D = 1 \text{ Н}$ ,  $T = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и  $F_s = 1 \text{ Н}$ . Как и в случае со скоростями, анализ будем проводить для расстояния между поверхностями схвата  $s = 0,14 \text{ м}$  и угла поворота  $\varphi = 20^\circ$ . Ввиду большего, чем при анализе скоростей, перепада значений расчетной величины по рабочей зоне, для визуализации будем использовать логарифмическую шкалу (рис. 4).

Анализ показывает, что внутри рабочей зоны наблюдается значительное (до трех порядков) изменение максимального приводного усилия. Наибольшие значения ( $\approx 10^3 \text{ Н}$ ) наблюдаются вдоль горизонтальных линий, проходящих через рабочую зону на уровнях около

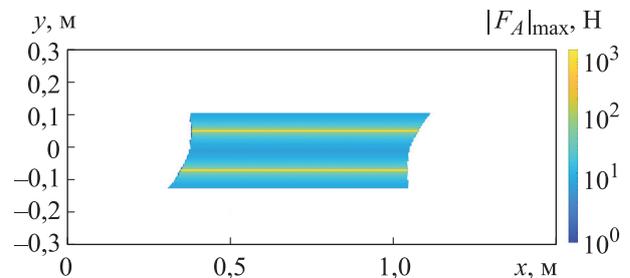


Рис. 4. Распределение абсолютной максимальной силы на каретках  $|F_A|_{\max}$  по рабочей зоне механизма при расстоянии между поверхностями схвата  $s = 0,14 \text{ м}$  и угле поворота  $\varphi = 20^\circ$

0,0475 и  $-0,0725$  м. Рост указанных значений является почти скачкообразным, что, как правило, происходит вблизи точек, соответствующих ОП вследствие потери управляемости ВЗ (далее ОП типа ПУ). Такой тип ОП характеризуется возможностью неконтролируемого перемещения ВЗ в рамках одной из имеющихся у него степеней свободы.

Известно [19], что в ОП типа ПУ определитель матрицы  $\mathbf{A}$  из выражения (2) становится равным нулю. В более ранней работе [15] проведен итерационный анализ знака определителя указанной матрицы. Так, при достаточно малом шаге перебора, если между двумя соседними точками знак  $\det(\mathbf{A})$  различный, то между этими точками существует точка с нулевым значением определителя матрицы  $\mathbf{A}$ , т. е. точка ОП типа ПУ.

Рассмотрим результаты итерационного анализа значений  $\det(\mathbf{A})$  при расстоянии между поверхностями схвата  $s = 0,14$  м и угле поворота  $\varphi = 20^\circ$ . Дополнительно выполним визуализацию конфигурации механизма при  $y_D = 0,0475$  м (рис. 5).

Видно, что границы областей положительного и отрицательного определителей в точности совпадают с горизонтальными линиями, вблизи которых наблюдается увеличение приводных усилий. Отсюда можно сделать вывод, что рост приводных усилий, как и предполагалось, вызван близостью к ОП типа ПУ. Это также подтверждает рассмотрение конфигурации механизма при  $y_D = 0,0475$  м.

В такой конфигурации в левом лямбда-механизме звенья  $B_{11}C_1$  и  $B_{12}C_1$  занимают горизонтальное положение. Это приводит к тому, что точка  $C_1$  будет иметь неуправляемую подвижность вдоль вертикальной прямой, что по определению является ОП типа ПУ. Теоретически, перемещение точки  $C_1$  должно быть беско-

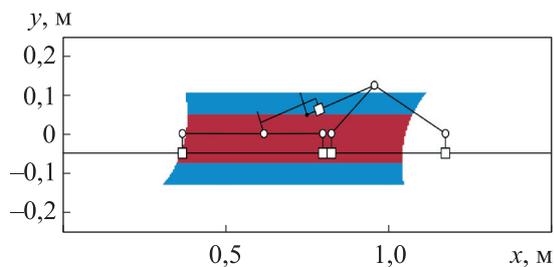


Рис. 5. Рабочая зона и конфигурация механизма при  $y_D = 0,0475$  м,  $s = 0,14$  м и  $\varphi = 20^\circ$  с положительным (■) и отрицательным (■) определителями матрицы  $\mathbf{A}$

нечно малым, но на практике будет конечным ввиду погрешностей изготовления и наличия податливости конструктивных элементов реального механизма.

**Определение максимального усилия на схвате.** Так как кинематическая избыточность механизма предназначена для использования его ВЗ в качестве схвата, необходимо выявить зависимость между приводными усилиями (движущими силами на каретках) и усилиями на схвате  $F_s$ . Обозначим составляющие внешней силы, действующей на ВЗ в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$ , как  $F_x$  и  $F_y$  соответственно.

С учетом того, что для рассматриваемого механизма  $\mathbf{P} = (F_x \ F_y \ T \ F_s)^T$ , а  $\mathbf{e} = (F_{A11} \ F_{A12} \ F_{A21} \ F_{A22})^T$ , выражение (6) можно переписать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} F_{A11} \\ F_{A12} \\ F_{A21} \\ F_{A22} \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^T \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ T \\ F_s \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Выражение (9) представляет собой систему линейных уравнений, следовательно, его можно записать как

$$\begin{pmatrix} F_{A11} \\ F_{A12} \\ F_{A21} \\ F_{A22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{A11}^{BH} \\ F_{A12}^{BH} \\ F_{A21}^{BH} \\ F_{A22}^{BH} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{A11}^S \\ F_{A12}^S \\ F_{A21}^S \\ F_{A22}^S \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^T \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ T \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbf{J}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_s \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где верхний индекс «вн» обозначает часть силы на соответствующей каретке, возникающую ввиду наличия внешней нагрузки, а индекс «s» — часть силы на каретке, обеспечивающую усилие на схвате.

Пусть  $F_s = 1$  Н, тогда, используя выражение (10), получаем

$$\hat{F}_{A(k)}^s = -\mathbf{j}_k^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -j_{k4}^T, \quad (11)$$

где  $\hat{F}_{A(k)}^s$  — сила на  $k$ -й каретке, необходимая, чтобы развить 1 Н силы на схвате,  $\mathbf{j}_k^T$  —  $k$ -я вектор-строка матрицы  $\mathbf{J}^T$ ;  $j_{k4}^T$  — элемент  $k$ -й строки четвертого столбца матрицы  $\mathbf{J}^T$ .

Пусть  $F_{пр k}$  — сила, которую может развить  $k$ -й привод. Тогда из выражений (10) и (11) можно найти максимальное усилие на схвате,

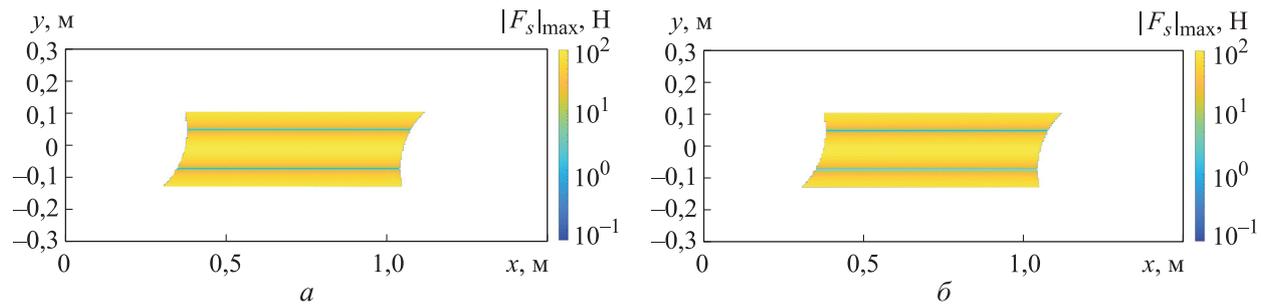


Рис. 6. Распределение максимального усилия на схвате  $|F_s|_{\max}$  по рабочей зоне механизма с усилием привода  $F_{\text{пр}} = 100$  Н при отсутствии (а) и наличии (б) внешней нагрузки

которое способен обеспечить  $k$ -й привод при заданной внешней нагрузке:

$$|F_{sk}|_{\max} = \frac{F_{\text{пр}k} - |F_{A(k)}^{\text{вн}}|}{|\hat{F}_{A(k)}^s|} \cdot 1 \text{ Н}. \quad (12)$$

Для механизма в целом максимальное усилие сжатия схвата при заданной внешней нагрузке и характеристиках привода будет представлять собой минимальное из значений, определенных по формуле (12):

$$\begin{aligned} |F_s|_{\max} &= \min_{k=1..n} (|F_{sk}|_{\max}) = \\ &= \min_{k=1..n} \left( \frac{F_{\text{пр}k} - |F_{A(k)}^{\text{вн}}|}{|\hat{F}_{A(k)}^s|} \cdot 1 \text{ Н} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

В качестве примера рассмотрим результаты итерационного анализа с использованием выражения (13) при тех же условиях, что и ранее ( $\varphi = 20^\circ$ ,  $s = 0,14$  м) для усилия привода  $F_{\text{пр}} = 100$  Н без внешней нагрузки (рис. 6, а) и с внешней нагрузкой  $F_x = F_y = 1$  Н,  $T = 0,1$  Н·м (рис. 6, б).

Видно, что максимальное усилие на схвате резко уменьшается вблизи ОП типа ПУ даже при отсутствии внешней нагрузки. В случае

наличия внешней нагрузки рабочая зона имеет разрыв в области нижней горизонтальной прямой, соответствующей ОП типа ПУ. В пределах этого разрыва значение усилия, вычисляемого по формуле (13), становилось бы отрицательным, т. е. приводы механизма неспособны выдержать внешнюю нагрузку даже без приложения какого-либо усилия на схвате.

## Выводы

1. Предложена математическая модель плоского кинематически избыточного МПС с интегрированным схватом, позволяющая оценивать максимальные приводные скорости и усилия с учетом близости к ОП.

2. Разработанная модель и программы для ее реализации могут быть полезными при проектировании реальных устройств на базе исследуемого механизма. Также математическая модель позволяет не только проводить скоростной и силовой анализ совместно с анализом ОП, но и вычислять максимальное усилие на схвате по известным характеристикам двигателей приводов.

## Литература

- [1] Крайнев А.Ф. *Механизмы машин. Функция, структура, действие*. Москва, Спектр, 2016. 175 с.
- [2] Hernández A., Petuya V. Position analysis of planar mechanisms with R-pairs using a geometrical-iterative method. *Mech. Mach. Theory*, 2004, vol. 39, no. 2, pp. 133–152, doi: [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(03\)00110-1](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(03)00110-1)
- [3] Vasiliu A., Yannou B. Dimensional synthesis of planar mechanisms using neural networks: application to path generator linkages. *Mech. Mach. Theory*, 2001, vol. 36, no. 2, pp. 299–310, doi: [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(00\)00037-9](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(00)00037-9)
- [4] García-Samartín J.F., Barrientos A. Kinematic modelling of a 3RRR planar parallel robot using genetic algorithms and neural networks. *Machines*, 2023, vol. 11, no. 10, art. 952, doi: <https://doi.org/10.3390/machines11100952>
- [5] Feiler G., Schwegel M., Knechtelsdorfer U. et al. Design and analysis of a class of planar cable-driven parallel robots with arbitrary rotation. *IFAC-PapersOnLine*, 2022, vol. 55, no. 27, pp. 82–88, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.10.492>

- [6] Zou Q., Yi B., Zhang D. et al. Design and kinematic analysis of a novel planar parallel robot with pure translations. *IEEE Access*, 2024, vol. 12, pp. 9792–9809, doi: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3352606>
- [7] Дворников Л.Т., Иванов М.С. К вопросу о применении в технике сложных многозвенных групп Ассура. *Современные проблемы теории машин*, 2020, № 9, с. 22–25, doi: <https://doi.org/10.26160/2307-342X-2020-9-22-25>
- [8] Chablat D., Rolland L. NAVARO II, a novel scissor-based planar parallel robot. *J. Mechanisms Robotics*, 2019, vol. 11, no. 4, art. 044501, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4043330>
- [9] Zakharov M.N., Laryushkin P.A., Erastova K.G. Stable Geometry of a plane five-link mechanism. *Russ. Engin. Res.*, 2018, vol. 38, no. 2, pp. 72–76, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068798X1802020X>
- [10] Эрастова К.Г., Шиханова Н.В., Комаров Р.А. и др. Исследование конструктивной рабочей зоны плоского лямбда-подобного механизма с учетом особых положений. *Вестник машиностроения*, 2021, № 3, с. 36–40.
- [11] Joubair A., Slamani M., Bonev I. A novel XY-theta precision table and a geometric procedure for its kinematic calibration. *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, 2012, vol. 28, no. 1, pp. 57–65, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2011.06.006>
- [12] Гебель Е.С., Гаврилина Л.В., Глазунов В.А. и др. К анализу сингулярных зон механизмов параллельной структуры с линейными двигателями. *Станкоинструмент*, 2021, № 3, с. 92–99.
- [13] Mostashiri N., Dhupia J.S., Verl A. et al. A review of research aspects of redundantly actuated parallel robots for enabling further applications. *IEEE ASME Trans. Mechatron.*, 2018, vol. 23, no. 3, pp. 1259–1269, doi: <https://doi.org/10.1109/TMECH.2018.2792450>
- [14] Gosselin C., Laliberté T., Veillette A. Singularity-free kinematically redundant planar parallel mechanisms with unlimited rotational capability. *IEEE Trans. Robot.*, 2015, vol. 31, no. 2, pp. 457–467, doi: <https://doi.org/10.1109/TRO.2015.2409433>
- [15] Ларюшкин П.А., Исполов Е.М., Долгих А.И. Решение задачи о положениях и исследование рабочей зоны плоского кинематически избыточного механизма параллельной структуры. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 11, с. 20–28. EDN: VUIBRW
- [16] Zlatanov D., Bonev I., Gosselin C. Constraint singularities of parallel mechanisms. *IEEE ICRA*, 2002, vol. 1, pp. 496–502, doi: <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2002.1013408>
- [17] Laryushkin P., Glazunov V., Erastova K. On the maximization of joint velocities and generalized reactions in the workspace and singularity analysis of parallel mechanisms. *Robotica*, 2019, vol. 37, no. 4, pp. 675–690, doi: <https://doi.org/10.1017/S026357471800125X>
- [18] Захаров М.Н., Куц М.С., Ларюшкин П.А. и др. Экспериментальная оценка эффективной рабочей зоны робота параллельной структуры с шаговыми двигателями. *Вестник машиностроения*, 2021, № 12, с. 44–48.
- [19] Gosselin C., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 1990, vol. 6, no. 3, pp. 281–290, doi: <https://doi.org/10.1109/70.56660>

## References

- [1] Kraynev A.F. *Mekhanizmy mashin. Funktsiya, struktura, deystvie* [Mechanisms Machines. Function, structure, action]. Moscow, Spektr Publ., 2016. 175 p. (In Russ.).
- [2] Hernández A., Petuya V. Position analysis of planar mechanisms with R-pairs using a geometrical-iterative method. *Mech. Mach. Theory*, 2004, vol. 39, no. 2, pp. 133–152, doi: [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(03\)00110-1](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(03)00110-1)
- [3] Vasiliu A., Yannou B. Dimensional synthesis of planar mechanisms using neural networks: application to path generator linkages. *Mech. Mach. Theory*, 2001, vol. 36, no. 2, pp. 299–310, doi: [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(00\)00037-9](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(00)00037-9)
- [4] García-Samartín J.F., Barrientos A. Kinematic modelling of a 3RRR planar parallel robot using genetic algorithms and neural networks. *Machines*, 2023, vol. 11, no. 10, art. 952, doi: <https://doi.org/10.3390/machines11100952>

- [5] Feiler G., Schwegel M., Knechtelsdorfer U. et al. Design and analysis of a class of planar cable-driven parallel robots with arbitrary rotation. *IFAC-PapersOnLine*, 2022, vol. 55, no. 27, pp. 82–88, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.10.492>
- [6] Zou Q., Yi B., Zhang D. et al. Design and kinematic analysis of a novel planar parallel robot with pure translations. *IEEE Access*, 2024, vol. 12, pp. 9792–9809, doi: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3352606>
- [7] Dvornikov L.T., Ivanov M.S. To the question of the use of complex, multi-link Assur groups in technique. *Sovremennye problemy teorii mashin* [Modern Problems of the Theory of Machines], 2020, no. 9, pp. 22–25, doi: <https://doi.org/10.26160/2307-342X-2020-9-22-25> (in Russ.).
- [8] Chablat D., Rolland L. NAVARO II, a novel scissor-based planar parallel robot. *J. Mechanisms Robotics*, 2019, vol. 11, no. 4, art. 044501, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4043330>
- [9] Zakharov M.N., Laryushkin P.A., Erastova K.G. Stable Geometry of a plane five-link mechanism. *Russ. Engin. Res.*, 2018, vol. 38, no. 2, pp. 72–76, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068798X1802020X>
- [10] Erastova K.G., Shikhanova N.V., Komarov R.A. et al. Workspace of a plane lambda mechanism with singularities. *Vestnik mashinostroeniya*, 2021, no. 3, pp. 36–40. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. Engin. Res.*, 2021, vol. 41, no. 6, pp. 498–503, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068798X21060058>)
- [11] Joubair A., Slamani M., Bonev I. A novel XY-theta precision table and a geometric procedure for its kinematic calibration. *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, 2012, vol. 28, no. 1, pp. 57–65, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2011.06.006>
- [12] Gebel E.S., Gavrilina L.V., Glazunov V.A. et al. To the analysis of singular zones mechanisms of parallel structure with linear motors. *Stankoinstrument*, 2021, no. 3, pp. 92–99. (In Russ.).
- [13] Mostashiri N., Dhupia J.S., Verl A. et al. A review of research aspects of redundantly actuated parallel robots for enabling further applications. *IEEE ASME Trans. Mechatron.*, 2018, vol. 23, no. 3, pp. 1259–1269, doi: <https://doi.org/10.1109/TMECH.2018.2792450>
- [14] Gosselin C., Laliberté T., Veillette A. Singularity-free kinematically redundant planar parallel mechanisms with unlimited rotational capability. *IEEE Trans. Robot.*, 2015, vol. 31, no. 2, pp. 457–467, doi: <https://doi.org/10.1109/TRO.2015.2409433>
- [15] Laryushkin P.A., Ispolov E.M., Dolgikh A.I. Solving the working area positioning and studying problem in the kinematically redundant parallel structure mechanism. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2023, no. 11, pp. 20–28. EDN: VUIBRW (in Russ.).
- [16] Zlatanov D., Bonev I., Gosselin C. Constraint singularities of parallel mechanisms. *IEEE ICRA*, 2002, vol. 1, pp. 496–502, doi: <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2002.1013408>
- [17] Laryushkin P., Glazunov V., Erastova K. On the maximization of joint velocities and generalized reactions in the workspace and singularity analysis of parallel mechanisms. *Robotica*, 2019, vol. 37, no. 4, pp. 675–690, doi: <https://doi.org/10.1017/S026357471800125X>
- [18] Zakharov M.N., Kuts M.S., Laryushkin P.A. et al. Experimental assessment of the effective working area of a robot of a parallel structure with stepped motors. *Vestnik mashinostroeniya*, 2021, no. 12, pp. 44–48 (In Russ.).
- [19] Gosselin C., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 1990, vol. 6, no. 3, pp. 281–290, doi: <https://doi.org/10.1109/70.56660>

Статья поступила в редакцию 14.12.2024

## Информация об авторах

**ИСПОЛОВ Егор Михайлович** — аспирант. ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский переулок, д. 4, e-mail: ispolov1989@mail.ru).

**ЛАРЮШКИН Павел Андреевич** — доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Основы конструирования машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: pav.and.lar@bmstu.ru).

**СЕНИЦЫНА Юлия Владимировна** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Основы конструирования машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: js.werris@bmstu.ru).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Исполов Е.М., Ларюшкин П.А., Сеницына Ю.В. Скоростной и силовой анализ кинематически избыточного плоского механизма параллельной структуры с интегрированным схватом. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 10, с. 3–12.

### Please cite this article in English as:

Ispolov E.M., Laryushkin P.A., Sinityna Yu.V. Velocity and force analysis of a kinematically redundant planar parallel structure mechanism with the integrated gripper. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 10, pp. 3–12.

## Information about the authors

**ISPOLOV Egor Michailovich** — Postgraduate. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101990, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonievskiy Pereulok, Bldg. 4, email: ispolov1989@mail.ru).

**LARYUSHKIN Pavel Andreevich** — Doctor of Science (Eng.), Associate Professor, Professor of Department of Machine Design Principles. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: pav.and.lar@bmstu.ru).

**SINITSYNA Yulia Vladimirovna** — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Machine Design Principles. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: js.werris@bmstu.ru).



## Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана предлагает читателям учебник Н.В. Быкова

### «Газовая динамика»

Рассмотрены основные термодинамические свойства газов, существенные для газовой динамики; теория одномерных стационарных течений в каналах переменного сечения, в том числе соплах реактивных двигателей; теория прямого скачка уплотнения; теория одномерных нестационарных движений с образованием ударных волн и волн разрежения; теория плоских и пространственных течений идеального газа, а также вопросы влияния вязкости, теплопроводности, турбулентности и химических реакций на газовые потоки.

Для студентов, обучающихся по специальности 17.05.02 «Стрелково-пушечное, артиллерийское и ракетное оружие», а также для изучающих газовую динамику и механику жидкости и газа. Может представлять интерес для научных работников и инженеров, в том числе и для самообразования.

### По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; <https://press.bmstu.ru>