

Механика

УДК 539.3; 629.7.023

Оценка влияния сдвиговой жесткости заполнителя на собственные частоты и прогибы трехслойной пластины

А.Е. Белкин, Д.Д. Кузнецова

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Evaluation of the influence of shear stiffness of the core on the natural frequencies and deflections of sandwich plate

A.E. Belkin, D.D. Kuznetsova

Bauman Moscow State Technical University

В расчетах трехслойных конструкций реальные заполнители сложной структуры (сотовые, гофрированные, складчатые и др.) заменяют условным однородным слоем с приведенными характеристиками упругости, важнейшими из которых являются жесткости при сдвигах. Получить значения этих жесткостей путем испытания заполнителя непосредственно в условиях относительного сдвига несущих слоев технически весьма сложно. Поэтому возникает задача идентификации сдвиговых жесткостей заполнителя по результатам косвенных измерений, например, собственных частот или перемещений при поперечном изгибе конструкции. Процедура идентификации включает в себя анализ влияния искомых параметров на измеряемые в испытаниях величины. Исследовано влияние сдвиговой жесткости изотропного заполнителя на прогибы и частоты собственных колебаний трехслойной прямоугольной пластины. Для расчетов использована теория Э.И. Григолюка — П.П. Чулкова, построенная на основе гипотезы ломаной нормали. Полная система дифференциальных уравнений задачи, имеющая восьмой порядок, представлена в виде трех уравнений относительно прогиба и углов сдвига в заполнителе. Для случая шарнирного закрепления пластины по контуру получены аналитические выражения для прогибов и частот собственных колебаний, явно определяющие их зависимость от сдвиговой жесткости заполнителя. Полученные формулы позволяют установить значение жесткости заполнителя по известным данным соответствующих испытаний.

EDN: OQBLDA, <https://elibrary/oqblda>

Ключевые слова: трехслойная пластина, сдвиговая жесткость заполнителя, идентификация, поперечный изгиб, частоты собственных колебаний

In calculations of sandwich structures real core of complex structure, in particular, honeycomb, corrugated, folded, etc., are replaced by a conventional homogeneous layer with reduced elasticity characteristics, the most important of which are shear rigidity. It is technically

very difficult to obtain the values of these rigidities by testing the core directly under conditions of relative shear of the bearing layers. Therefore, the problem of identifying the shear rigidities of the core based on the results of indirect measurements, for example, natural frequencies or displacements during transverse bending of the structure, arises. The identification procedure includes an analysis of the influence of the sought parameters on the values measured in the tests. The article investigates the effect of the shear rigidity of an isotropic core on the deflections and natural frequencies of a three-layer rectangular plate. For calculations, the theory of E.I. Grigolyuk — P.P. Chulkov, constructed on the basis of the hypothesis of a broken normal, is used. The complete system of differential equations of the problem, having the eighth order, is presented in the form of three equations for the deflection and shear angles in the core. For the case of hinged fixing of the plate along the contour, analytical expressions for deflections and natural frequencies are obtained, clearly determining their dependence on the shear rigidity of the core. The obtained formulas allow us to establish the value of the core rigidity based on the known data of the corresponding tests.

EDN: OQBLDA, <https://elibrary/oqblda>

Keywords: sandwich plate, shear rigidity of the core, identification, transverse bending, natural vibration frequencies

При расчете трехслойной конструкции с заполнителем сложной структуры, например в виде сот, возникает проблема задания приведенных упругих характеристик условного слоя, заменяющего реальный заполнитель. Теоретическое определение жесткостей сотового заполнителя является сложной задачей, первые приближенные решения которой получены в работах представителей новосибирской научной школы А.Я. Александрова и Л.М. Куршина. Результаты этих исследований обобщены в виде справочных материалов в книгах [1–3].

В настоящее время для уточненного определения жесткостей заполнителя часто используют процедуру их идентификации по результатам испытаний образцов трехслойных конструкций при статическом изгибе или поперечных колебаниях [4–8]. Суть метода состоит в минимизации разности экспериментальных и теоретических значений частот собственных колебаний (далее собственные частоты) или прогибов путем варьирования искоемых параметров модели. Для расчета можно применять различные математические модели.

В статье [4] идентификация параметров упругости сотового заполнителя проведена по значениям собственных частот и ускорений при ударе с применением модели балки С.П. Тимошенко. Расчеты при ударной нагрузке выполнены методом главных координат.

В работе [5] использована конечно-элементная модель балки С.П. Тимошенко, упругие характеристики которой итерационно обновляются так, чтобы вычисленные частоты соответствовали измеренным.

В статье [6] рассмотрена идентификация жесткостей трехслойной пластины, рассчитываемой по модели Р. Миндлина, т. е. с осреднением сдвигов по толщине. Теоретический анализ выполнен методом Рэля — Ритца с использованием в качестве координатных функций ортогональных полиномов.

Модель Р. Миндлина часто применяют в расчетах многослойных пластин методом конечных элементов (МКЭ). Так, для этой модели, реализуемой МКЭ, предложено определять полный набор приведенных характеристик упругости сэндвич-панелей с заполнителями разной структуры [7]. Более точная модель деформирования трехслойной пластины рассмотрена в работе [8] с реализацией МКЭ. В публикациях [9–11] решена родственная задача идентификации характеристик упругости слоистых композитов.

Одним из важных этапов идентификации является анализ чувствительности математической модели к изменениям определяемых параметров, позволяющий провести ее настройку на воспроизведение результатов испытаний.

Цель работы — оценить численно влияние жесткости при сдвиге (далее сдвиговая жесткость) заполнителя на прогибы и собственные частоты трехслойной пластины на примерах возможных испытаний для последующего использования при идентификации жесткости.

Для модели трехслойного стержня такая оценка получена в работе [12].

Теория изгиба трехслойных пластин. Для расчета трехслойных конструкций разработаны прикладные теории [13–16], основанные на

различных кинематических и статических гипотезах и моделях деформирования. Теория, построенная в работе [13], базируется на использовании гипотезы ломаной линии, согласно которой нормаль в жестких слоях при деформации остается прямой и нормальной к искривленной срединной поверхности, а в заполнителе, оставаясь прямой, составляет с геометрической нормалью угол сдвига.

Также предложены математическая модель многослойных конструкций с осреднением сдвигов по высоте сечения [14] и модель расчета с учетом трансверсальной податливости слоя заполнителя [15].

Для достижения поставленной цели выбрана теория ломаной нормали Э.И. Григолюка — П.П. Чулкова [13]. Приняты следующие обозначения: h_k , E_k и ν_k — толщина, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала k -го внешнего несущего слоя, $k = 1, 2$; h_3 — толщина третьего слоя — заполнителя ($c = h_3 / 2$); E_3 , ν_3 и G_3 — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига заполнителя; x_1 , x_2 — декартовы координаты в срединной плоскости заполнителя; z — координата, отсчитываемая по нормали к срединной плоскости; u_i — перемещения точек срединной плоскости заполнителя в направлении x_i ; w — прогиб пластины; γ_i — угол сдвига в заполнителе в плоскости $x_i z$.

Дифференцирование по координате x_i будем обозначать запятой с последующим указанием индекса координаты, например, $\partial w / \partial x_i = w_{,i}$. Прочие обозначения пояснены в тексте.

В соответствии с гипотезой ломаной нормали, проиллюстрированной на рис. 1, тангенциальные перемещения слоев u_i^z изменяются по толщине пластины по следующему закону [13]:

$$u_i^z = \begin{cases} u_i + c\gamma_i - zw_{,i} & \text{при } c \leq z \leq c + h_1; \\ u_i + z(\gamma_i - w_{,i}) & \text{при } -c \leq z \leq c; \\ u_i - c\gamma_i - zw_{,i} & \text{при } -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{cases} \quad (1)$$

$i = 1, 2.$

Из соотношений (1) следует закон распределения деформаций в слоях

$$\begin{aligned} e_{ij}^1 &= \epsilon_{ij} + c\alpha_{ij} - zw_{,ij} & \text{при } c \leq z \leq c + h_1; \\ e_{ij}^2 &= \epsilon_{ij} - c\alpha_{ij} - zw_{,ij} & \text{при } -c - h_2 \leq z \leq -c; \\ e_{ij}^3 &= \epsilon_{ij} + z\alpha_{ij} - zw_{,ij} & \text{при } -c \leq z \leq c; \end{aligned}$$

$i = 1, 2; j = 1, 2,$

где верхний индекс у деформаций (в дальнейшем у силовых факторов) указывает номер слоя;

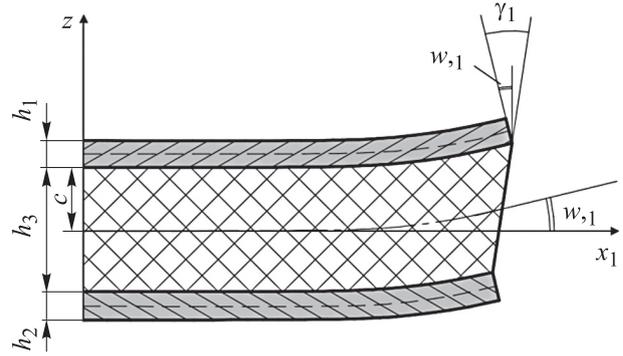


Рис. 1. Схема распределения перемещений по толщине пластины при изгибе

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{2}(\gamma_{i,j} + \gamma_{j,i}).$$

Деформации поперечного сдвига в заполнителе являются неизменными по толщине:

$$e_{i3}^3 = \frac{1}{2}\gamma_i.$$

В уравнениях равновесия трехслойных конструкций [13], кроме интенсивностей сил N_{ij} и моментов M_{ij} , появляются новые силовые факторы H_{ij} , энергетически соответствующие параметрам деформации α_{ij} , т. е. производным углов сдвига в заполнителе. Эти факторы, названные в работах Э.И. Григолюка и П.П. Чулкова моментами сдвига, определяются как

$$H_{ij} = cN_{ij}^1 - cN_{ij}^2 + M_{ij}^3.$$

Пяти независимым перемещениям u_i , γ_i , w нормального элемента пластины соответствуют пять уравнений равновесия

$$\begin{aligned} N_{1i,1} + N_{2i,2} &= 0; \\ H_{1i,1} + H_{2i,2} - Q_i^3 &= 0; \\ M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} + q &= 0, \end{aligned}$$

где q — давление на пластину.

Рассматривая пластины симметричного строения (с одинаковыми несущими слоями), полагаем, что при малых прогибах в них не возникают мембранные силы, т. е. $N_{ij} = 0$.

Введем упруго-геометрические характеристики слоев пластины:

- жесткости при растяжении

$$B_k = \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2}, \quad k = 1, 2, 3;$$

- жесткости при изгибе

$$D_k = B_k \frac{h_k^2}{12} + B_k \left(c + \frac{h_k}{2} \right)^2, \quad k = 1, 2; \quad D_3 = B_3 \frac{h_3^2}{12};$$

- смешанные жесткости

$$K_k = B_k \left(c + \frac{h_k}{2} \right), \quad k = 1, 2.$$

Соотношения упругости для моментов запишем в матричном виде. Для пластины с одинаковыми изотропными несущими слоями и изотропным наполнителем имеем

$$\begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{22} \\ H_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & g_{14} & g_{15} & 0 \\ * & g_{22} & 0 & g_{24} & g_{25} & 0 \\ * & * & g_{33} & 0 & 0 & g_{36} \\ * & * & * & g_{44} & g_{45} & 0 \\ * & * & * & * & g_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & g_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \\ -w_{,11} \\ -w_{,22} \\ -w_{,12} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где знаком «*» обозначены элементы, симметричные относительно главной диагонали;

$$g_{11} = g_{22} = 2B_1c^2 + D_3;$$

$$g_{12} = 2B_1v_1c^2 + D_3v_3;$$

$$g_{14} = g_{25} = 2K_1c + D_3;$$

$$g_{15} = g_{24} = 2K_1v_1c + D_3v_3;$$

$$g_{33} = 2B_1(1-v_1)c^2 + D_3(1-v_3);$$

$$g_{36} = 2K_1(1-v_1)c + D_3(1-v_3);$$

$$g_{44} = g_{55} = 2D_1 + D_3 = D;$$

$$g_{45} = 2D_1v_1 + D_3v_3;$$

$$g_{66} = 2D_1(1-v_1) + D_3(1-v_3).$$

Поперечные силы в наполнителе выражаются через углы сдвига следующим образом:

$$Q_1^3 = C_{сдв} \gamma_1; \quad Q_2^3 = C_{сдв} \gamma_2, \quad (3)$$

где $C_{сдв}$ — искомая в задаче идентификации сдвиговая жесткость наполнителя, $C_{сдв} = G_3h_3$.

После подстановки соотношений (2) и (3) в уравнения равновесия моментов получаем разрешающую систему трех уравнений относительно прогиба и углов сдвига

$$\begin{aligned} & g_{11}\gamma_{1,11} + \frac{1}{2}g_{33}\gamma_{1,22} + \left(g_{12} + \frac{1}{2}g_{33} \right) \gamma_{2,12} - \\ & - g_{14}(\nabla^2 w)_{,1} = C_{сдв} \gamma_1; \\ & \left(g_{12} + \frac{1}{2}g_{33} \right) \gamma_{1,12} + g_{11}\gamma_{2,22} + \frac{1}{2}g_{33}\gamma_{2,11} - \\ & - g_{14}(\nabla^2 w)_{,2} = C_{сдв} \gamma_2; \\ & D\nabla^2 \nabla^2 w - g_{14}\nabla^2 (\gamma_{1,1} + \gamma_{2,2}) = q, \end{aligned} \quad (4)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа.

Для оценки влияния сдвиговой жесткости наполнителя $C_{сдв}$ на изгиб пластины рассмотрим задачу, допускающую простое аналитиче-

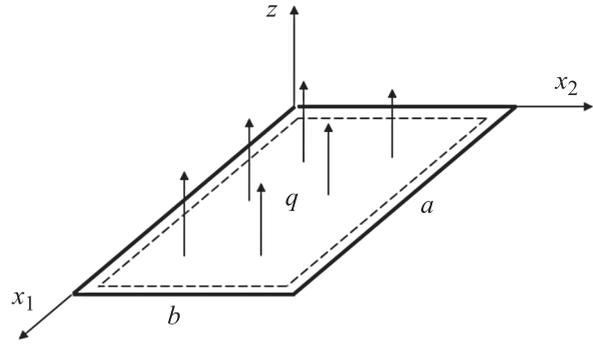


Рис. 2. Схема прямоугольной пластины, шарнирно закрепленной по всему контуру

ское решение. Рассмотрим опертую по контуру прямоугольную пластину (рис. 2) с жесткими диафрагмами, запрещающими сдвиги вдоль контура. В этом случае граничные условия имеют следующий вид:

- на сторонах $x_1 = 0$ и $x_1 = a$

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad H_{11} = 0, \quad \gamma_2 = 0;$$

- на сторонах $x_2 = 0$ и $x_2 = b$

$$w = 0, \quad M_{22} = 0, \quad H_{22} = 0, \quad \gamma_1 = 0.$$

При сформулированных условиях решение можно представить в двойных тригонометрических рядах

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos m\xi_1 \sin n\xi_2; \\ \gamma_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin m\xi_1 \cos n\xi_2; \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin m\xi_1 \sin n\xi_2; \\ \xi_1 &= \pi x_1/a; \quad \xi_2 = \pi x_2/b. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} — коэффициенты,

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{\pi m W_{mn}}{a} \left(\frac{g_{14}}{g_{11} \lambda_{mn}} \right); \\ B_{mn} &= \frac{\pi n W_{mn}}{b} \left(\frac{g_{14}}{g_{11} \lambda_{mn}} \right); \\ C_{mn} &= W_{mn} \left(1 + \frac{g_{14}^2}{g_{11} D \lambda_{mn}} \right), \end{aligned}$$

где W_{mn} — коэффициенты разложения функции прогибов пластины в двойной тригонометрический ряд согласно классической теории Кирхгоффа,

$$W_{mn} = \frac{q_{mn}}{\Delta_{mn}^2 D};$$

λ_{mn} — параметры влияния жесткости заполнителя,

$$\lambda_{mn} = \frac{C_{сдв}}{g_{11} \Delta_{mn}} + 1 - \frac{g_{14}^2}{g_{11} D};$$

q_{mn} — коэффициенты преобразования Фурье функции давления,

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x_1, x_2) \sin m\xi_1 \sin n\xi_2 dx_1 dx_2;$$

Δ_{mn} — «следы» вычисления оператора Лапласа,

$$\Delta_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Таким образом, при любом давлении $q(x_1, x_2)$ прогибы трехслойной пластины определяются суммой прогибов, связанных с искривлениями срединной поверхности,

$$w_{изг} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin m\xi_1 \sin n\xi_2$$

и прогибов от сдвигов в заполнителе

$$w_{сдв} = \frac{g_{14}^2}{g_{11} D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_{mn}}{\lambda_{mn}} \sin m\xi_1 \sin n\xi_2. \quad (6)$$

Вклад второго слагаемого оценим ниже на числовых примерах. Здесь лишь отметим, что безразмерный параметр $\chi = g_{14}^2 / g_{11} D$ близок к единице для пластин с низкомодульным заполнителем и тонкими обшивками. Действительно, при $D_3 \ll 2B_1c^2$ значение параметра χ зависит только от отношения толщин несущих слоев и заполнителя:

$$\chi \approx \frac{K_I^2}{B_1 D_1} = \frac{(1 + h_1/h_3)^2}{(1 + h_1/h_3)^2 + \frac{1}{3}(h_1/h_3)^2}.$$

Рассматривая пластины с тонкими обшивками (h_1/h_3 — малая величина), полагаем $\chi = 1$ и $\lambda_{mn} = C_{сдв} / (g_{11} \Delta_{mn})$, что приводит к изменению формулы (6) и упрощению выражения для прогибов

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\Delta_{mn}^2 D} \left(1 + \frac{g_{11} \Delta_{mn}}{C_{сдв}} \right) \sin m\xi_1 \sin n\xi_2. \quad (7)$$

Переходя к расчету собственных колебаний пластин, заменяем давление q в системе (4) интенсивностью сил инерции

$$q = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

где ρ и h — осредненная плотность и полная толщина пластины; t — время.

Из системы (4) для форм колебаний в виде произведения синусов с числами полуволн m и n получаем собственные частоты

$$p_{mn} = \Delta_{mn} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} (1 - \beta_{mn}), \quad (8)$$

где β_{mn} — поправки, отражающие влияние деформаций сдвига в заполнителе,

$$\beta_{mn} = \frac{g_{14}^2}{D \left(g_{11} + \frac{C_{сдв}}{\Delta_{mn}} \right)}.$$

Полагая $\chi = g_{14}^2 / g_{11} D = 1$, имеем

$$\beta_{mn} = \frac{1}{\left(1 + \frac{C_{сдв}}{g_{11} \Delta_{mn}} \right)}.$$

Результаты расчетов прогибов и собственных частот трехслойных пластин. Пример 1. Пластина, нагруженная равномерным давлением q . При такой нагрузке функция прогибов (7) принимает вид

$$w = \frac{16qb^4}{\pi^6 D} \times \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{\tilde{\Delta}_{mn}} + \frac{\pi^2 g_{11}}{C_{сдв} b^2} \right) \frac{\sin m\xi_1 \sin n\xi_2}{mn \tilde{\Delta}_{mn}}, \quad (9)$$

где

$$\tilde{\Delta}_{mn} = \left(\frac{b}{a} \right)^2 m^2 + n^2.$$

Полученное решение (9) содержит два безразмерных параметра: отношение жесткостей заполнителя и обшивок $\Pi_1 = C_{сдв} b^2 / g_{11}$ и отношение длин сторон пластины a/b . О влиянии жесткости заполнителя на изгиб пластины можно судить по значениям максимального прогиба w_{max} в центре пластины.

На рис. 3 показаны графики зависимости масштабированных прогибов пластины w_{max}/w_0 (где $w_0 = 16qb^4/\pi^6 D$), $w_{изг}/w_0$ и $w_{сдв}/w_0$ от параметра сдвиговой жесткости заполнителя Π_1 .

Чтобы ориентироваться в широком диапазоне возможных значений параметра Π_1 , рассмотрим пример из справочника [1], где приведен расчет трехслойной панели симметричного строения с внешними слоями из дюралюминия со следующими характеристиками: $E_1 = E_2 = 0,69 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$; $h_1 = h_2 = 1,2$ мм. Сотовый заполнитель с ячейками в форме пра-

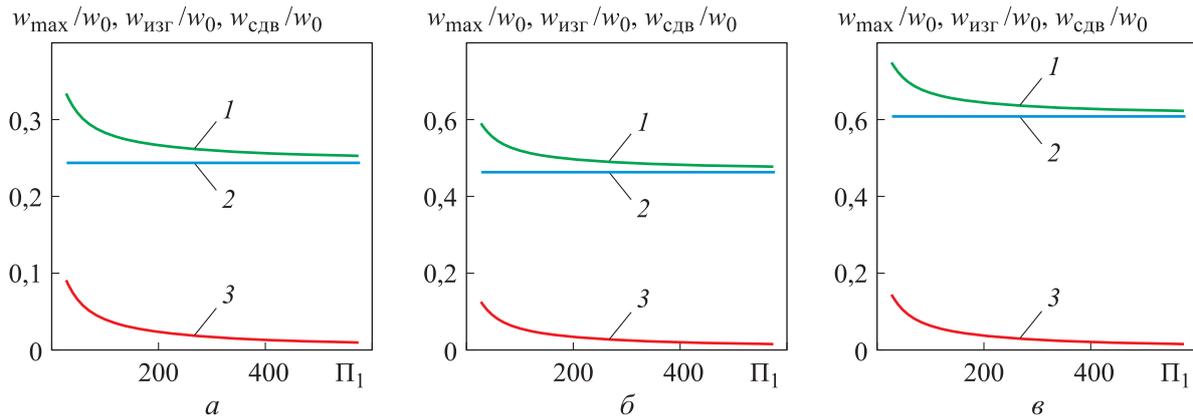


Рис. 3. Зависимости масштабированных прогибов пластины w_{\max}/w_0 (1), $w_{\text{изг}}/w_0$ (2) и $w_{\text{сдв}}/w_0$ (3) от параметра сдвиговой жесткости заполнителя Π_1 при отношении длин ее сторон $a/b = 1,0$ (а), $1,5$ (б) и $2,0$ (в)

вильных шестиугольников изготовлен из дюралюминиевой фольги толщиной 0,1 мм. Размер ячейки сот 5,48 мм; высота сот (толщина заполнителя) $h_3 = 15$ мм. Приведенный модуль сдвига заполнителя, определенный в работе [1], $G_3 = 434$ МПа.

С учетом указанных параметров сдвиговая жесткость заполнителя $C_{\text{сдв}} = G_3 h_3 = 6510$ Н/мм; жесткость внешних слоев панели $g_{11} = 2B_1 c^2 = 104,5 \cdot 10^5$ Н·мм. Тогда для рассмотренной в работе [1] квадратной панели со стороной $b = 300$ мм параметр сдвиговой жесткости заполнителя $\Pi_1 = 56$. Из графиков (рис. 3) находим $w_{\max}/w_0 = 0,323$, причем $w_{\text{изг}}/w_0 = 0,244$ и $w_{\text{сдв}}/w_0 = 0,079$. Таким образом, вклад сдвигов в максимальный прогиб панели достигает почти 25 %.

Пример 2. Пластина, нагруженная давлением q локально по прямоугольному участку раз-

мером $e \times d$ в окрестности центра. Коэффициенты разложения такой нагрузки в двойной тригонометрический ряд имеют вид

$$q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q}{\pi^2 mn} (-1)^{\frac{m+n}{2}+1} \sin \frac{m\pi e}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2b} & \text{при нечетных числах } m, n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Прогибы пластины определяются как

$$w = \frac{16qb^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left[\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}+1}}{mn \tilde{\Delta}_{mn}} \left(\frac{1}{\tilde{\Delta}_{mn}} + \frac{\pi^2 g_{11}}{C_{\text{сдв}} b^2} \right) \times \sin \frac{m\pi e}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2b} \sin m\xi_1 \sin n\xi_2 \right].$$

Как и в первом примере, оценим влияние сдвиговой жесткости заполнителя на максимальный прогиб пластины. Теперь масштабиро-

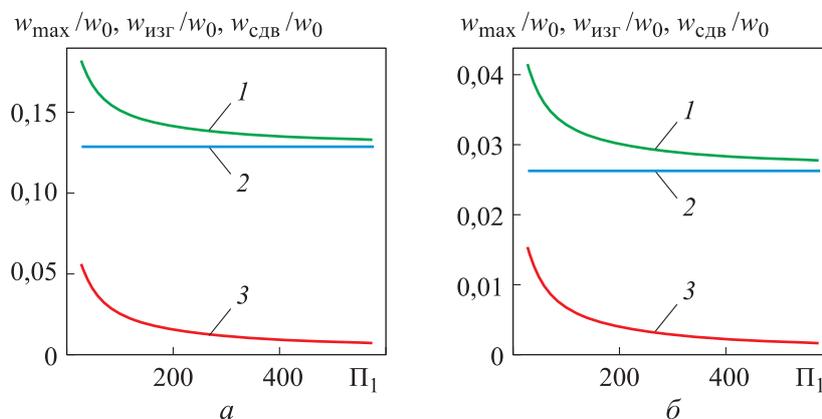


Рис. 4. Зависимости масштабированных прогибов квадратной пластины w_{\max}/w_0 (1), $w_{\text{изг}}/w_0$ (2) и $w_{\text{сдв}}/w_0$ (3) от параметра сдвиговой жесткости заполнителя Π_1 при различных относительных размерах площадки нагружения: а — $e/a = d/b = 0,5$; б — $e/a = d/b = 0,2$

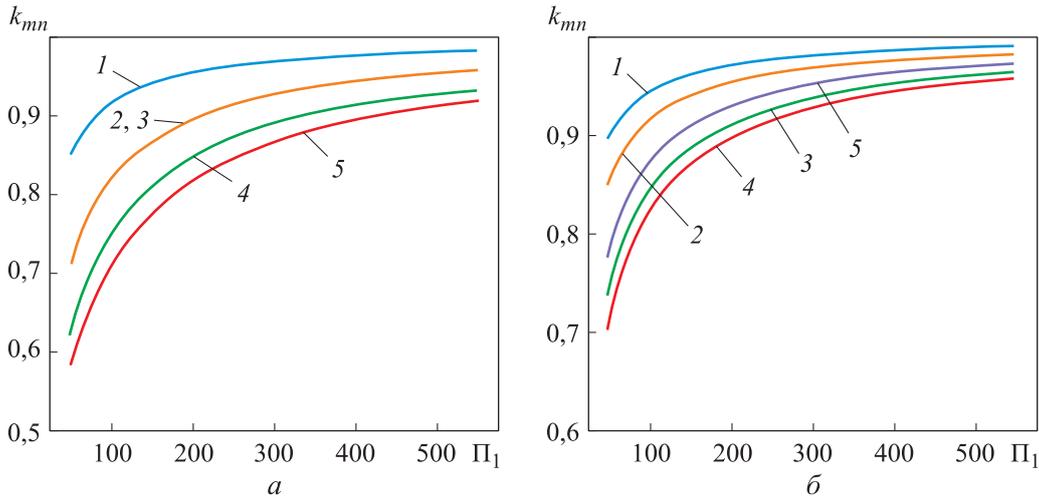


Рис. 5. Зависимости поправочных коэффициентов k_{11} (1), k_{21} (2), k_{12} (3), k_{22} (4) и k_{31} (5) от параметра сдвиговой жесткости заполнителя Π_1 при отношении сторон $a/b = 1,0$ (а) и $a/b = 2,0$ (б)

ванный прогиб зависит не только от параметра сдвиговой жесткости заполнителя Π_1 и отношения длин сторон a/b , но и от относительных размеров площадки нагружения e/a и d/b .

Графики зависимости масштабированных прогибов квадратной пластины w_{max}/w_0 от сдвиговой жесткости заполнителя при заданных размерах площадки нагружения приведены на рис. 4. Из графиков следует, что для пластины, рассмотренной в первом примере, вклад сдвигов в заполнителе в максимальный прогиб панели $w_{сдв}/w_{max}$ составляет 28 % при площадке нагружения $e = d = 0,5a$ и 35 % при площадке нагружения $e = d = 0,2a$. Очевидно, что значимость сдвигов возрастает для концентрированной нагрузки.

Пример 3. Частоты собственных колебаний трехслойной пластины (8) определяются выражением

$$p_{mn} = k_{mn} p_{mn}^0,$$

где k_{mn} — поправочные коэффициенты,

$$k_{mn} = 1 / \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \tilde{\Delta}_{mn}}{\Pi_1}};$$

p_{mn}^0 — собственные частоты пластины, рассчитанные по теории Кирхгофа,

$$p_{mn}^0 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

О значениях поправочных коэффициентов, зависящих от параметра сдвиговой жесткости заполнителя, можно судить по графикам, приведенным на рис. 5. Видно, что влияние сдвигов

в заполнителе на собственные частоты возрастает с ростом числа волн в изогнутой поверхности пластины.

Заметим, что многие заполнители, в частности сотовые, являются конструктивно ортотропными, т. е. имеют различные сдвиговые жесткости $C_{сдв1}$ и $C_{сдв2}$ в соответствующих координатных плоскостях x_1z и x_2z . Это обстоятельство нетрудно учесть, заменив жесткости в соотношениях упругости (3) для поперечных сил и $Q_2^3 = C_{сдв2} \gamma_2$.

Так как вклад заполнителя в изгибно-крутильные жесткости, как правило, мал, трехслойный пакет можно считать по-прежнему изотропным в отношении изгибов. При такой формулировке решение задачи об изгибе пластины усложняется незначительно. Коэффициенты ряда для прогиба (5) принимают вид

$$C_{mn} = W_{mn} \left[1 + \frac{g_{14}^2}{D} \times \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 C_{сдв1} + \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 C_{сдв2} + \frac{1}{2} g_{33} \Delta_{mn}^2 \right] \times \frac{1}{C_{сдв1} C_{сдв2} + r_1 C_{сдв1} + r_2 C_{сдв2} + \frac{g_{33}}{2} \left(g_{11} - \frac{g_{14}^2}{D} \right) \Delta_{mn}^2}, \quad (10)$$

где

$$r_1 = \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \left(g_{11} - \frac{g_{14}^2}{D} \right) + \frac{1}{2} g_{33} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2;$$

$$r_2 = \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \left(g_{11} - \frac{g_{14}^2}{D} \right) + \frac{1}{2} g_{33} \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2.$$

Используя формулы (5) и (10), можно проанализировать влияние каждой из сдвиговых жесткостей $C_{сдв1}$ и $C_{сдв2}$ на прогибы пластины.

Выводы

1. Представлено решение задач изгиба и собственных колебаний прямоугольных трехслойных пластин по теории Э.И. Григолюка — П.П. Чулкова для идентификации сдвиговой

жесткости заполнителя сложной структуры по результатам возможных испытаний пластин.

2. Для случая шарнирного закрепления пластины по контуру получены аналитические выражения для прогибов и собственных частот, явно определяющие их зависимость от сдвиговой жесткости заполнителя.

3. Исследовано влияние сдвиговой жесткости заполнителя на прогибы и собственные частоты трехслойной пластины.

Литература

- [1] Биргер И.А., Пановко Я.Г., ред. *Прочность, устойчивость, колебания*. Т. 2. Москва, Машиностроение, 1968. 464 с.
- [2] Панин В.Ф., Гладков Ю.А. *Конструкции с заполнителем*. Москва, Машиностроение, 1991. 270 с.
- [3] Лизин В.Т., Пяткин В.А. *Проектирование тонкостенных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1994. 384 с.
- [4] Saito T., Parbery R.D., Okuno S. et al. Parameter identification for aluminum honeycomb sandwich panels based on orthotropic Timoshenko beam theory. *J. Sound Vib.*, 1997, vol. 208, no. 2, pp. 271–287, doi: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1189>
- [5] Shi Y., Sol H., Hua H. Material parameter identification of sandwich beams by an inverse method. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 290, no. 3–5, pp. 1234–1255, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.05.026>
- [6] Bastos S.F., Borges L., Rochinha F.A. Numerical and experimental approach for identifying elastic parameters in sandwich plates. *Shock Vib.*, 2002, vol. 9, pp. 193–201, doi: <https://doi.org/10.1155/2002/617913>
- [7] Cheng Q.H., Lee H.P., Lu C. A numerical analysis approach for evaluating elastic constants of sandwich structures with various cores. *Compos. Struct.*, 2006, vol. 74, no. 2, pp. 226–236, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.04.007>
- [8] Matter M., Gmür T., Cugnoni J. et al. Identification of the elastic and damping properties in sandwich structures with a low core-to-skin stiffness ratio. *Compos. Struct.*, 2011, vol. 93, no. 2, pp. 331–341, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.09.009>
- [9] Нихамкин М.Ш., Соломонов Д.Г., Зильбершмидт В.В. Идентификация характеристик упругости композита по экспериментальным данным о модальных характеристиках образцов. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2019, № 1, с. 108–120, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.1.09>
- [10] Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н. и др. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов. *Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки*, 2015, т. 157, № 4, с. 112–132.
- [11] Прокудин О.А., Соляев Ю.О., Бабайцев А.В. и др. Динамические характеристики трехслойных балок с несущими слоями из алюмокомпозитов. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2020, № 4, с. 260–270, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.22>
- [12] Белкин А.Е., Бирюков И.Д. Определение сдвиговой жесткости заполнителя трехслойного стержня по известным значениям прогибов или частот собственных колебаний. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 2, с. 12–22.
- [13] Григолюк Э.И., Чулков П.П. *Устойчивость и колебания трехслойных оболочек*. Москва, Машиностроение, 1973. 170 с.
- [14] Васильев В.В. *Механика многослойных конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988. 271 с.
- [15] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984. 264 с.
- [16] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1980. 375 с.

References

- [1] Birger I.A., Panovko Ya.G., eds. *Prochnost, ustoychivost, kolebaniya*. T. 2 [Strength, stability, vibrations. Vol. 2]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968. 464 p. (In Russ.).
- [2] Panin V.F., Gladkov Yu.A. *Konstruktsii s zapolnitelem* [Constructions with filler]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991. 270 p. (In Russ.).
- [3] Lizin V.T., Pyatkin V.A. *Proektirovanie tonkostennykh konstruktsiy* [Designing of thin-walled structures.]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1994. 384 p. (In Russ.).
- [4] Saito T., Parbery R.D., Okuno S. et al. Parameter identification for aluminum honeycomb sandwich panels based on orthotropic Timoshenko beam theory. *J. Sound Vib.*, 1997, vol. 208, no. 2, pp. 271–287, doi: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1189>
- [5] Shi Y., Sol H., Hua H. Material parameter identification of sandwich beams by an inverse method. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 290, no. 3–5, pp. 1234–1255, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.05.026>
- [6] Bastos S.F., Borges L., Rochinha F.A. Numerical and experimental approach for identifying elastic parameters in sandwich plates. *Shock Vib.*, 2002, vol. 9, pp. 193–201, doi: <https://doi.org/10.1155/2002/617913>
- [7] Cheng Q.H., Lee H.P., Lu C. A numerical analysis approach for evaluating elastic constants of sandwich structures with various cores. *Compos. Struct.*, 2006, vol. 74, no. 2, pp. 226–236, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.04.007>
- [8] Matter M., Gmür T., Cugnoni J. et al. Identification of the elastic and damping properties in sandwich structures with a low core-to-skin stiffness ratio. *Compos. Struct.*, 2011, vol. 93, no. 2, pp. 331–341, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.09.009>
- [9] Nikhamkin M.Sh., Solomonov D.G., Zilbershmidt V.V. Identification of elastic parameters of composite using experimental data on modal characteristics of samples. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2019, no. 1, pp. 108–120, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.1.09> (in Russ.).
- [10] Kayumov R.A., Lukankin S.A., Paymushin V.N. et al. Identification of mechanical characteristics of fiber-reinforced composites. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2015, t. 157, no. 4, pp. 112–132. (In Russ.).
- [11] Prokudin O.A., Solyaev Yu.O., Babaytsev A.V. et al. Dynamic characteristics of three-layer beams with load-bearing layers made of alumino-glass plastic. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2020, no. 4, pp. 260–270, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.22> (in Russ.).
- [12] Belkin A.E., Biryukov I.D. Shear stiffness determination of the three-layer rod based on the deflections or natural frequencies known values. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2025, no. 2, pp. 12–22. (In Russ.).
- [13] Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. *Ustoychivost i kolebaniya trekhsloynnykh obolochek* [Stability and vibrations of three-layer shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973. 170 p. (In Russ.).
- [14] Vasilyev V.V. *Mekhanika mnogoslounykh konstruktsiy iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of multilayer structures from composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988. 271 p. (In Russ.).
- [15] Alfutov N.A., Zinovyev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogoslounykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of multilayer plates and shells from composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984. 264 p. (In Russ.).
- [16] Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogoslounykh konstruktsiy* [Mechanics of multilayer structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 375 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 19.03.2025

Информация об авторах

БЕЛКИН Александр Ефимович — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: aefbelkin@bmstu.ru).

КУЗНЕЦОВА Дарья Дмитриевна — инженер конструкторского бюро «Прорывные космические исследования и технологии» НУК СМ. МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, ул. Госпитальный переулок, д. 10, email: kuznetsova.dd@bmstu.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Белкин А.Е., Кузнецова Д.Д. Оценка влияния сдвиговой жесткости заполнителя на собственные частоты и прогибы трехслойной пластины. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 11, с. 3–12.

Please cite this article in English as:

Belkin A.E., Kuznetsova D.D. Evaluation of the influence of shear stiffness of the core on the natural frequencies and deflections of sandwich plate. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 11, pp. 3–12.

Information about the authors

BELKIN Alexander Efimovich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: aefbelkin@bmstu.ru).

KUZNETSOVA Darya Dmitrievna — Engineer, Small Spacecraft Design Bureau. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, Hospitalny Pereulok, Bldg. 10, email: kuznetsova.dd@bmstu.ru).



Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана предлагает читателям учебник Н.В. Быкова «Газовая динамика»

Рассмотрены основные термодинамические свойства газов, существенные для газовой динамики; теория одномерных стационарных течений в каналах переменного сечения, в том числе соплах реактивных двигателей; теория прямого скачка уплотнения; теория одномерных нестационарных движений с образованием ударных волн и волн разрежения; теория плоских и пространственных течений идеального газа, а также вопросы влияния вязкости, теплопроводности, турбулентности и химических реакций на газовые потоки.

Для студентов, обучающихся по специальности 17.05.02 «Стрелково-пушечное, артиллерийское и ракетное оружие», а также для изучающих газовую динамику и механику жидкости и газа. Может представлять интерес для научных работников и инженеров, в том числе и для самообразования.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; <https://press.bmstu.ru>