

УДК 5394.012:519.6

Оценка влияния условий текучести J_2 – J_3 на напряженное состояние трубчатых образцов для подтверждения статической прочности валов газотурбинных двигателей

А.Д. Худякова^{1,2}, Д.В. Сапронов^{1,2}, И.С. Бабинец¹, И.М. Курьшев^{1,2}¹ ФАУ «ЦИАМ им. П.И. Баранова»² МГТУ им. Н.Э. Баумана

Evaluation of the influence of yield conditions J_2 – J_3 on the stress state of tubular specimens to confirm the static strength of gas turbine shafts

A.D. Khudyakova^{1,2}, D.V. Saproinov^{1,2}, I.S. Babinets¹, I.M. Kuryshev^{1,2}¹ Central Institute of Aviation Motors² Bauman Moscow State Technical University

При проектировании валов газотурбинных двигателей важно правильно определять напряженно-деформированное состояние с учетом действия комплекса сил и моментов и особенностей поведения материала при сложном нагружении. Принятое условие текучести может оказывать влияние на результаты расчета напряженно-деформированного состояния детали в случае чувствительности материала детали к виду напряженного состояния. Интерес представляет разработка методики выбора условия текучести, а также оценка степени его влияния на результаты расчетов. Требования выпуклости и симметрии, предъявляемые к условиям текучести металлических поликристаллических сплавов, вместе с гипотезой об упругом изменении объема позволяют рассматривать ограниченный набор условий текучести, заключенных между шестигранными призмами Треска и Ишлинского — Хилла в пространстве главных напряжений — условия текучести J_2 – J_3 . Проанализированы известные варианты таких условий. На примере сплава В95 продемонстрирована работа алгоритма выбора условия и оценки его параметров по результатам испытаний трубчатых образцов на растяжение и кручение. Проведено моделирование испытаний трубчатых образцов в условиях последовательного растяжения и кручения с использованием различных условий текучести. Анализ результатов расчетов показал, что выбор условия текучести оказывает значительное влияние на эквивалентные напряжения и параметры вида напряженного состояния при кручении после предварительного растяжения.

EDN: BTVQLX, <https://elibrary/btbqlx>

Ключевые слова: условие текучести J_2 – J_3 , третий инвариант, пластическое течение, вид напряженного состояния, параметр Лоде, касательная жесткость

The adopted yield condition can influence the results of calculating the stress-strain state of a part in the case of sensitivity of the part material to the type of stress state. Of interest is the development of a methodology for selecting the yield condition, as well as an assessment of the degree of its influence on the calculation results. The convexity and symmetry requirements imposed on the yield conditions of metal polycrystalline alloys, together with

the hypothesis of an elastic change in volume, make it possible to consider a limited set of yield conditions enclosed between the Tresca and Ishlinsky-Hill hexagonal prisms in the space of principal stresses — yield conditions J_2 – J_3 . The paper analyzes known versions of such conditions, using the example of B95 alloy, the operation of the algorithm for selecting the condition and estimating its parameters based on the results of testing tubular specimens for tension and torsion is demonstrated. Simulation of tests of tubular specimens under successive tension and torsion using various yield conditions is carried out. Analysis of the calculation results showed that the choice of the yield condition has a significant effect on the equivalent stresses and parameters of the type of stress state during torsion after preliminary stretching.

EDN: BTBQLX, <https://elibrary/btbqlx>

Keywords: yield condition J_2 – J_3 , third invariant, plastic flow, type of stress state, Lode parameter, tangential rigidity

При эксплуатации газотурбинных двигателей (ГТД) летательных аппаратов одним из самых критичных случаев отказа является потеря кинематической связи между компрессором и турбиной вследствие разрушения вала. Это может привести к резкому росту частоты вращения рабочих колес турбины и последующему нелокализованному разрушению.

В эксплуатации валы ГТД нагружены такими параметрами, как крутящий момент и осевая сила от газовых сил, изгибающие моменты от массовых и гироскопических сил и от дисбаланса, центробежные силы и температурное поле. Поэтому одной из важных задач, возникающих при проектировании валов ГТД, является достоверное определение напряженно-деформированного состояния (НДС) с учетом пластических деформаций. Эту задачу необходимо решить даже в тех случаях, когда эксплуатационные нагрузки неспособны вызывать в материале детали напряжения, превышающие предел текучести.

Согласно требованиям нормативных документов, экспериментальная проверка прочности валов ГТД должна включать в себя статические испытания для определения характера распределения напряжений, перемещений и углов закрутки, возникающих в наиболее опас-

ных сечениях валов под действием нагрузок от работы ГТД и эволюций самолета. Также необходимо проводить испытания для определения разрушающего крутящего момента для натуральных валов.

Испытание натуральных валов в лабораторных условиях — крайне дорогостоящий и трудоемкий процесс из-за сложности воспроизведения всех видов нагрузок и больших габаритных размеров валов. Для снижения стоимости и трудоемкости целесообразно выполнять испытания конструктивно-подобных элементов (КПЭ) — образцов, сохраняющих конструктивные и технологические особенности критических зон натурального вала. Конструктивное подобие устанавливают, сопоставляя параметры вида напряженного состояния (НС), полученные расчетным путем при моделировании испытаний натуральных валов и КПЭ.

В качестве примера на рис. 1 показан характер распределения эквивалентных по Мизесу напряжений (далее эквивалентные напряжения) в материале натурального вала (рис. 1, а) и КПЭ (рис. 1, б), полученный путем моделирования испытания для определения разрушающего крутящего момента. На первом шаге расчета к натурному валу прикладывали эксплуатационные нагрузки: комбинацию растяжения,

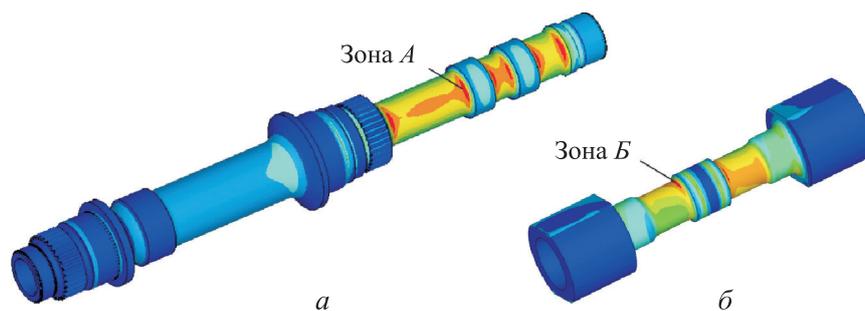


Рис. 1. Распределение эквивалентных напряжений в материале натурального вала (а) и КПЭ (б)

кручения и изгиба (эквивалентные напряжения при этом не достигали предела текучести материала), после чего пошагово увеличивали крутящий момент. Критической зоне *A* натурального вала соответствует критическая зона *B* КПЭ. Нагрузки для КПЭ, соответствующие эксплуатационным нагрузкам для натурального вала, подбирали, обеспечивая совпадение эквивалентных напряжений и параметров вида НС в зонах *A* и *B*.

В качестве параметров вида НС рассматривали параметр Лоде L и параметр жесткости НС η :

$$L = \frac{27}{2} \frac{J_3}{(3J_2)^{3/2}}; \quad \eta = \frac{I_1}{3(3J_2)^{1/2}},$$

где J_3 и J_2 — третий и второй инварианты девиатора напряжений; I_1 — первый инвариант тензора напряжений.

Параметры L и η , представляющие собой нормализованные инварианты J_3 и I_1 , принимают значения от -1 до 1 . При одноосном растяжении $L=1$, $\eta=1/3$, а при чистом кручении $L=0$, $\eta=0$. Зависимости параметра Лоде L , параметра жесткости η и эквивалентных напряжений, отнесенных к пределу текучести, $\sigma_{\text{экв}}/\sigma_T$, от номера шага расчета в зонах *A* и *B* приведены на рис. 2. Видно, что в зонах *A* и *B* параметры L и η близки, что в совокупности с близкими эквивалентными напряжениями позволяет считать натуральный вал и КПЭ конструктивно-подобными.

Анализируя рис. 2, можно отметить, что эксплуатационные нагрузки вызывают в зонах *A* и *B* НС, близкое к одноосному ($L \approx 0,99$,

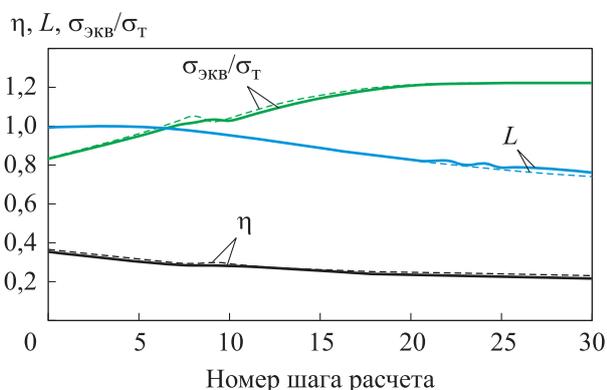


Рис. 2. Зависимости параметра Лоде L , параметра жесткости η и эквивалентных напряжений, отнесенных к пределу текучести, $\sigma_{\text{экв}}/\sigma_T$, от номера шага расчета в зонах *A* (сплошные линии) и *B* (штриховые линии)

$\eta \approx 0,35$). По мере увеличения крутящего момента параметры L и η падают, но не достигают нуля. Если не прикладывать эксплуатационные нагрузки, а только пошагово увеличивать крутящий момент, НС в зонах *A* и *B* будет соответствовать чистому кручению ($L=0$, $\eta=0$).

Для использования описанного подхода требуется располагать моделью упругопластического поведения материала, применимую для описания сложного НС, возникающего в критической зоне детали при нагружении эксплуатационными нагрузками и последующем кручении.

Так как знакопеременного деформирования не происходит, подходящим вариантом является модель пластического течения с изотропным упрочнением и законом течения, ассоциированным с поверхностью нагружения. Уравнение поверхности нагружения определяется выбранным условием текучести (УТ). Для материалов, упругопластическое поведение которых нечувствительно к виду НС, выбирают УТ Мизеса (УТ J_2). Такая модель представляет собой самый простой вариант модели пластического течения, реализованный во многих коммерческих и свободно распространяемых программных комплексах.

Валы ГТД изготавливают из хромистых теплопрочных мартенситных и мартенситностареющих сталей [1]. Для этих сталей характерна ярко выраженная шейка: относительные удлинение и сужение при испытаниях стандартных образцов на разрыв составляют 10...15 % и 45...58 % соответственно.

В некоторых работах, посвященных исследованию УТ авиационных сплавов [2–4], показано, что для материалов с ярко выраженной шейкой УТ Мизеса предпочтительнее, чем УТ Треска. При этом можно заметить, что в некоторых случаях [4] для лучшего соответствия результатов расчета экспериментальным данным требуется менее консервативное УТ, чем УТ Мизеса. Этому требованию удовлетворяют, например, УТ Ишлинского — Хилла и УТ Карафиллиса — Бойсе.

Цель работы — исследование УТ J_2 – J_3 — УТ, уравнения которых зависят не только от второго инварианта девиатора напряжений J_2 , но и от третьего J_3 .

Проанализированы известные однопараметрические варианты УТ, из которых выбраны два условия, охватывающие остальные случаи.

Определяющие соотношения модели пластического течения с выбранными УТ реализованы в формате динамических библиотек. На примере сплава В95 продемонстрирована методика выбора УТ. Проведено моделирование деформирования трубчатых образцов с использованием различных УТ по двум типам траекторий: кручения с последующим растяжением и растяжения с последующим кручением. Второй тип траектории воспроизводит НС в критических зонах натурального вала и трубчатого образца.

Анализ условий текучести J_2 – J_3 . Будем рассматривать материалы, упругое деформирование которых подчинено обобщенному закону Гука. Полагаем, что существует поверхность в пространстве компонент тензора напряжений σ_{ij} , разделяющая области упругого и упругопластического деформирования, — поверхность нагружения. Начальное состояние поверхности нагружения будем называть УТ. Если объемное деформирование происходит упруго, то УТ имеет вид [5]

$$f(J_2; J_3) = \sigma_{\tau_0}, \quad (1)$$

где $f(J_2; J_3)$ — функция текучести; σ_{τ_0} — предел текучести при растяжении.

Предположение изотропии материала в смысле равноправности осей главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и одинаковых свойств при растяжении и сжатии позволяет рассматривать УТ определенной симметрии [5]. Согласно принципу максимума работы пластической деформации, УТ должно быть выпуклым. Условия, удовлетворяющие этим требованиям, заключены между двумя шестигранными призмами — УТ Треска и УТ Ишлинского — Хилла — и при одноосном растяжении или сжатии совпадают (рис. 3).

Наибольшее различие между интенсивностями напряжений в пределе текучести σ_{τ_i} наблюдается при чистом сдвиге: $\sigma_{\tau_i} = (\sqrt{3}/2)\sigma_{\tau_0}$ для УТ Треска и $\sigma_{\tau_i} = (2/\sqrt{3})\sigma_{\tau_0}$ для УТ Ишлинского — Хилла. Для УТ Мизеса, проекцией которого на девиаторную плоскость является окружность, $\sigma_{\tau_i} = \sigma_{\tau_0}$ независимо от вида НС.

При чистом сдвиге $\sigma_{\tau_i} = \sqrt{3}\tau_{\tau_0}$ (где τ_{τ_0} — предел текучести при кручении) для выбора наиболее подходящего для конкретного материала УТ удобно руководствоваться величиной отношения пределов текучести на растяжение и

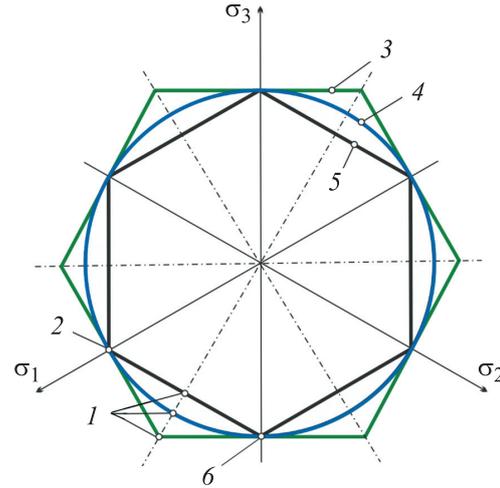


Рис. 3. Проекция на девиаторную плоскость различных УТ:

- 1 — чистый сдвиг; 2 — одноосное растяжение;
- 3 — УТ Ишлинского — Хилла; 4 — УТ Мизеса;
- 5 — УТ Треска; 6 — одноосное сжатие

кручению $\sigma_{\tau_0}/\tau_{\tau_0}$. Если $\sigma_{\tau_0}/\tau_{\tau_0} = 2$, то наилучшим выбором будет УТ Треска, если $\sigma_{\tau_0}/\tau_{\tau_0} = \sqrt{3}$ — УТ Мизеса, а если $\sigma_{\tau_0}/\tau_{\tau_0} = 3/2$ — УТ Ишлинского — Хилла.

УТ материалов, для которых $\sigma_{\tau_0}/\tau_{\tau_0} \in (3/2; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2)$, можно описать предложенными в работах [6–9] уравнениями (табл. 1).

Все функции текучести, приведенные в табл. 1, могут быть выражены только инвариантами J_2 и J_3 , так как для главных напряжений справедливо соотношение [10]

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\theta + 2\pi/3) \\ \sin\theta \\ \sin(\theta + 4\pi/3) \end{pmatrix} + \frac{I_1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(\sqrt{J_2})^3} \right).$$

Для каждого параметрического условия в табл. 1 приведены диапазоны допустимых значений параметра, т. е. обеспечивающих выпуклость УТ. С учетом этих диапазонов указаны и возможные значения величины $\sigma_{\tau_0}/\tau_{\tau_0}$. Значения параметра каждого из параметрических условий однозначно определяются величиной $\sigma_{\tau_0}/\tau_{\tau_0}$ (рис. 4).

Отметим, что различные УТ J_2 – J_3 , обеспечивающие одинаковое значение величины $\sigma_{\tau_0}/\tau_{\tau_0}$, отличаются друг от друга незначительно (рис. 5). В связи с этим для дальнейшего рассмотрения выбраны УТ Хосфорда и УТ Кара-

Таблица 1

Условия текучести J_2 - J_3

УТ	Функция текучести	σ_{T0}/τ_{T0}
Треска	$\max\{ \sigma_1 - \sigma_2 , \sigma_2 - \sigma_3 , \sigma_1 - \sigma_3 \}$	2
Мизеса	$\sqrt{3J_2}$	$\sqrt{3}$
Ишлинского — Хилла	$\frac{3}{2} \max\left\{\left \sigma_1 - \frac{I_1}{3}\right , \left \sigma_2 - \frac{I_1}{3}\right , \left \sigma_3 - \frac{I_1}{3}\right \right\}$	$\frac{3}{2}$
Хосфорда [6]	$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2 ^h + \sigma_2 - \sigma_3 ^h + \sigma_1 - \sigma_3 ^h)^{\frac{1}{h}}}{2^{\frac{1}{h}}}, h \in [1; +\infty)$	$[\sqrt{3}; 2)$
Дракера [7]	$\frac{\sqrt{3}(J_2^3 - dJ_3^2)^{\frac{1}{6}}}{(1 - 4d/27)^{\frac{1}{6}}}, d \in \left[-\frac{27}{8}; \frac{9}{4}\right]$	$\left[18^{\frac{1}{6}}; (81/2)^{\frac{1}{6}}\right]$
Казаку [8]	$\frac{\sqrt{3}(J_2^4 - cJ_3^2)^{\frac{1}{8}}}{(1 - 4c/27)^{\frac{1}{8}}}, c \in \left[-\frac{27}{5}; 3\right]$	$\left[45^{\frac{1}{8}}; (729/5)^{\frac{1}{8}}\right]$
Карафиллиса — Бойсе [9]	$\frac{3\left(\left \sigma_1 - \frac{I_1}{3}\right ^{2b} + \left \sigma_2 - \frac{I_1}{3}\right ^{2b} + \left \sigma_3 - \frac{I_1}{3}\right ^{2b}\right)^{\frac{1}{2b}}}{(2^{2b} + 2)^{\frac{1}{2b}}}, b \in [1; +\infty)$	$[3/2; \sqrt{3})$

филлиса — Бойсе, как условия, обеспечивающие в совокупности наиболее широкий диапазон охвата отношения пределов текучести $\sigma_{T0}/\tau_{T0} \in (3/2; 2)$.

Функции выбранных УТ удобно представлять, выражая с помощью формулы (2) через

J_2 и $\theta = \theta(J_2; J_3)$. Тогда УТ Хосфорда имеет вид

$$f(J_2; J_3) = f(J_2; \theta) = \frac{2\sqrt{J_2}}{2^{1/h}} \left[\cos^h \theta + \cos^h \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \cos^h \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \right]^{1/h} = \sigma_{T0}. \quad (3)$$

При $h=1$ и $h \rightarrow \infty$ формула (2) переходит в УТ Треска, а при $h=2$ и $h=4$ — в УТ Мизеса.

УТ Карафиллиса — Бойсе имеет вид

$$f(J_2; J_3) = f(J_2; \theta) = \frac{2\sqrt{3J_2}}{(2^{2b} + 2)^{1/2b}} \left[\sin^{2b} \theta + \sin^{2b} \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin^{2b} \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \right]^{1/2b} = \sigma_{T0}. \quad (4)$$

При $b=1$ формула (3) переходит в УТ Мизеса, а при $b \rightarrow \infty$ — в УТ Ишлинского — Хилла.

Для идентификации параметра h или b требуются значения пределов текучести при растяжении σ_{T0} и кручении τ_{T0} , которые определяют по диаграммам деформирования, записанным при осевом растяжении гладкого ци-

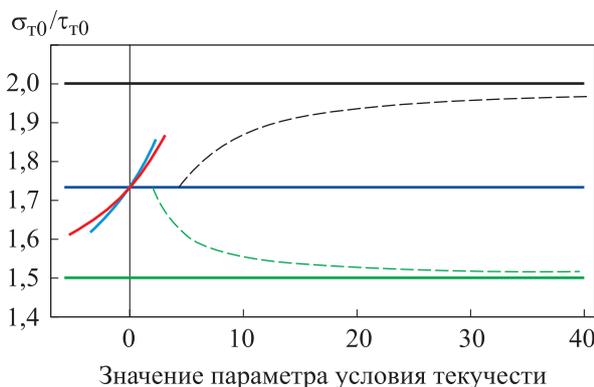


Рис. 4. Возможные для описания различных УТ J_2 - J_3 отношения пределов текучести на растяжение и кручение σ_{T0}/τ_{T0} :
 — — УТ Треска; — — УТ Хосфорда;
 — — УТ Казаку; — — УТ Дракера; — — УТ Мизеса;
 — — УТ Карафиллиса — Бойсе;
 — — УТ Ишлинского — Хилла

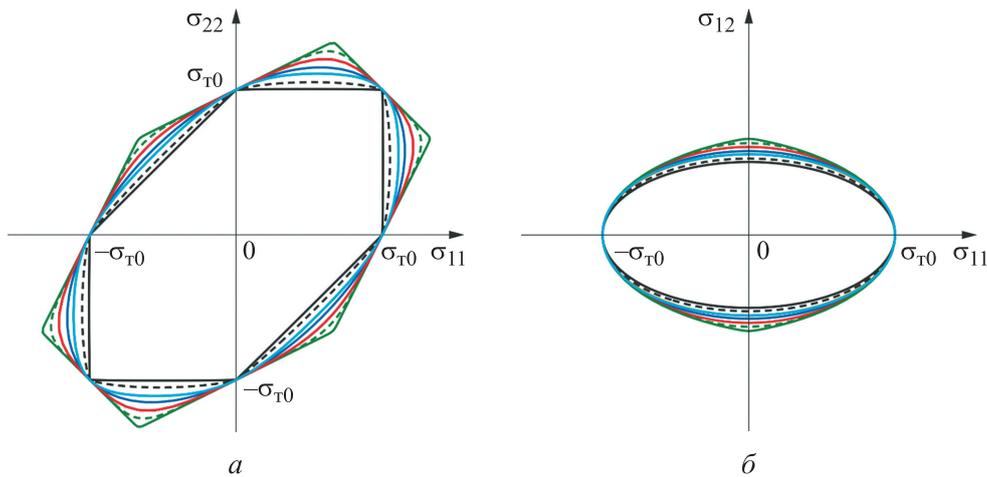


Рис. 5. Проекция различных УТ J_2 - J_3 на плоскости $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ (а) и $\sigma_{11} - \sigma_{12}$ (б):

- и --- — УТ Хосфорда при $\sigma_{T0}/\tau_{T0} = 1,99$ и $1,90$;
- — — УТ Хосфорда, Дракера и Казаку при $\sigma_{T0}/\tau_{T0} = 1,80$;
- — — УТ Хосфорда, Дракера, Казаку и Карафиллиса — Бойсе при $\sigma_{T0}/\tau_{T0} = \sqrt{3}$;
- — — УТ Дракера, Казаку, Карафиллиса — Бойсе при $\sigma_{T0}/\tau_{T0} = 1,65$;
- — — и — — — УТ Карафиллиса — Бойсе при $\sigma_{T0}/\tau_{T0} = 1,58$ и $1,51$

линдрического образца и кручении тонкостенного трубчатого образца. Если выполняется двойное неравенство $3/2 < \sigma_{T0}/\tau_{T0} < \sqrt{3}$, то используют УТ (4), а параметр b определяют, решая уравнение

$$\sigma_{T0}/\tau_{T0} = 3(2^{2b-1} + 1)^{-1/2b}.$$

Если соблюдается неравенство $\sqrt{3} < \sigma_{T0}/\tau_{T0} < 2$, то применяют УТ (3), а параметр h находят, решая уравнение

$$\sigma_{T0}/\tau_{T0} = (2^{h-1} + 1)^{1/h}.$$

Соотношения теории изотермического пластического течения с изотропным упрочнением и УТ J_2 - J_3 и алгоритм численной реализации. Согласно теории изотермического пластического течения, приращения полных деформаций $d\epsilon_{ij}$ складываются из приращений упругих $d\epsilon_{ij}^e$ и пластических деформаций $d\epsilon_{ij}^p$:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p. \tag{5}$$

Для приращений упругих деформаций $d\epsilon_{ij}^e$ справедлив обобщенный закон Гука. Приращения пластических деформаций будем определять согласно закону пластического течения, ассоциированному с поверхностью нагружения:

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial \psi(\sigma_{ij}; \epsilon_{ij}^p)}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda, \tag{6}$$

где $\psi(\sigma_{ij}; \epsilon_{ij}^p) = 0$ — поверхность нагружения, разделяющая области упругого и упругопла-

стического деформирования в пространстве компонент тензора напряжений σ_{ij} ; $d\lambda$ — скалярный пластический множитель, $d\lambda > 0$.

Причем $d\epsilon_{ij}^p \neq 0$ только в случае активного нагружения: при $\psi = 0$ и $d\psi > 0$.

Для изотропного закона упрочнения уравнение поверхности нагружения, базирующейся на УТ (1), имеет вид

$$\psi(\sigma_{ij}; \epsilon_{ij}^p) = f(J_2; J_3) - \sigma_T(\chi) = 0, \tag{7}$$

где χ — параметр Одквиста; $\sigma_T = \sigma_T(\chi)$ — закон изотропного упрочнения, $\sigma_T(0) = \sigma_{T0}$; при $\chi = 0$ соотношение (6) обращается в формулу (1).

Выражение для параметра Одквиста

$$d\chi = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p}$$

позволяет записать формулу (6) следующим образом:

$$\begin{aligned} d\epsilon_{ij}^p &= \frac{\eta_{ij}}{\sqrt{\frac{3}{2} \eta_{ij} \eta_{ij}}} d\chi; \\ \eta_{ij} &= \frac{\partial \psi(\sigma_{ij}; \epsilon_{ij}^p)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f(J_2; \theta)}{\partial \sigma_{ij}} = \\ &= \frac{\partial f(J_2; \theta)}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f(J_2; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Частные производные по параметрам J_2 и θ в выражении (8) определяются функцией текущей УТ (3) и (4). Внедрение соотношений (5)–

(8) в конечно-элементный расчет заключается в создании программного модуля, обеспечивающего вычисления в соответствии с формулами (5)–(8) матрицы касательной жесткости на каждом шаге расчета.

Для УТ (3) и (4) созданы программные модули в формате динамических библиотек [11], позволяющие по НДС, компонентам тензора пластических деформаций и значению χ в конце предыдущего шага расчета и приращению полных деформаций на текущем шаге вычислять новые компоненты тензоров напряжений, пластических деформаций и матрицу касательной жесткости. Подробное описание реализованного в работе [11] численного алгоритма типа упругий предиктор/пластический корректор на примере УТ Хосфорда (3) приведено в статье [12]. В силу гладкости УТ (3) и (4) удобны для описания предельных случаев с угловыми точками при численном расчете: УТ Треска заменяют УТ Хосфорда (3) при $h \geq 100$, а УТ Ишлинского — Хилла — УТ Карафиллиса — Бойсе (4) при $b \geq 50$.

Обоснование выбора УТ для сплава В95. Теорию изотермического пластического течения с изотропным упрочнением и одним из УТ J_2 – J_3 (см. табл. 1) замыкают функция изотропного упрочнения $\sigma_T = \sigma_T(\chi)$ и отношение σ_{T0}/τ_{T0} , для определения которых требуются диаграммы деформирования $\sigma_{11}(\epsilon_{11})$ и $\sigma_{12}(\epsilon_{12})$.

В работе [13] приведены диаграммы деформирования сплава В95, полученные при растяжении, кручении и сжатии в обозначениях девиаторного пространства А.А. Ильюшина Θ – σ [14]. При осевом растяжении Θ и σ имеют вид

$$\Theta = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} \epsilon_{11} - \frac{1}{3} \epsilon_{22} - \frac{1}{3} \epsilon_{33} \right); \quad \sigma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{11}.$$

Таблица 2

Упругопластические свойства сплава В95

Коэффициент Пуассона μ	Модуль упругости E , МПа	Модуль всестороннего сжатия K , МПа	Предел текучести, МПа	
			при растяжении σ_{T0}	при кручении τ_{T0}
0,33	657,1	644,2	501,5	230,6
<i>Диаграмма деформирования при растяжении</i>				
Деформации ϵ_{11} , %	0,763/0,823	0,936/1,040	1,206/1,384	1,706/1,845
Напряжения σ_{11} , МПа	501,5/538,9	561,5/569,0	577,7/584,1	591,6/594
<i>Примечание.</i> В числителе дроби указаны значения до пересчета, в знаменателе — после пересчета.				

Использование связи шаровых частей тензора полных деформаций и напряжений через модуль всестороннего сжатия K позволяет перейти к представлению компонент ϵ_{11} и σ_{11} через параметры Θ и σ :

$$\epsilon_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Theta + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sigma}{9K}; \quad \sigma_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma. \quad (9)$$

При кручении справедливы соотношения

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Theta; \quad \sigma_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma. \quad (10)$$

В работе [13] модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ сплава В95 не приведены. При обработке диаграмм деформирования коэффициент Пуассона принимали равным 0,33. На пересчитанной в соответствии с выражениями (10) диаграмме, полученной при кручении, выделяли линейный участок и определяли его наклон E_T , после чего вычисляли модуль упругости $E = E_T(1 + \mu)$ и модуль всестороннего сжатия $K = E/[3(1 - 2\mu)]$ (табл. 2). Используя расчетное значение K , пересчитывали диаграммы, полученные при растяжении и сжатии в соответствии с формулами (9).

На рис. 6 приведены пересчитанные описанным способом диаграммы деформирования сплава В95 — экспериментальные из работы [13] при растяжении, сжатии, кручении и теоретические при кручении, построенные путем масштабирования экспериментальной диаграммы при растяжении в предположении справедливости УТ Ишлинского — Хилла, Мизеса и Треска.

Функцию изотропного упрочнения определяли по диаграмме деформирования при растяжении: $\sigma_T = \sigma_{11}(\epsilon_{11} - \sigma_{11}/E)$.

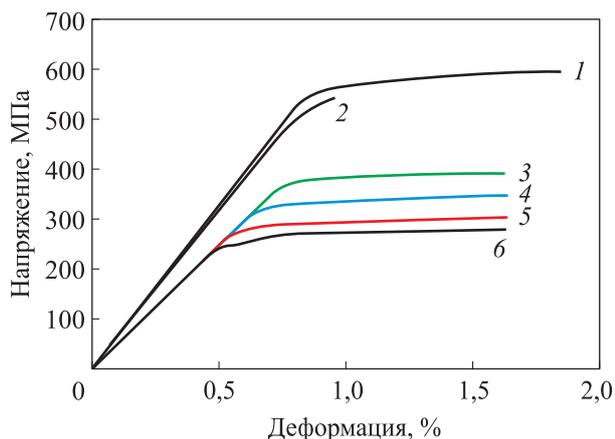


Рис. 6. Диаграммы деформирования сплава В95: 1, 2 и 6 — экспериментальные при растяжении, сжатии и кручении; 3, 4 и 5 — теоретические при кручении в предположении справедливости УТ Ишлинского — Хилла, Мизеса и Треска

Отношение пределов текучести $\sigma_{т0}/\tau_{т0} \approx 2,17$ (см. табл. 2) превышает максимально допустимое при принятых положениях о симметрии и выпуклости УТ значение $\sigma_{т0}/\tau_{т0} \approx 2$. Как видно из рис. 6, все теоретические диаграммы кручения лежат выше экспериментальной.

Останемся в рамках принятого математического аппарата для В95, считая, что отклонение экспериментальной диаграммы от диаграммы, полученной в предположении справедливости УТ Треска, связано с разбросом свойств материала. Оценить разброс по данным работы [13] не представляется возможным, так как каждым условиям испытаний соответствует только один испытуемый образец. Считая справедливым принятое предположение об одинаковых механических свойствах при растяжении и сжатии и рассматривая экспериментальные

диаграммы при растяжении и сжатии, допускаем, что возможен разброс свойств В95 в пределах 8 % по напряжениям при заданном значении деформаций.

Таким образом, наиболее подходящим уравнением для описания УТ сплава В95 является УТ Треска, для приближения которого в дальнейших расчетах использовано УТ Хосфорда (3) при $h = 100$.

Моделирование деформирования сплава В95 по двухзвенным ломаным траекториям. Чтобы определить влияние УТ на расчетное НДС, проводили моделирование деформирования тонкостенного трубчатого образца из сплава В95 и сравнивали результаты расчетов с данными испытаний, приведенными в работе [13].

Моделирование выполняли для трубчатого образца с длиной рабочей части 110 мм, толщиной стенки 1 мм и радиусом срединной поверхности 15,5 мм в соответствии с работой [13] (рис. 7, а). На рис. 7, б приведена расчетная модель трубчатого образца: сетка конечных элементов и прикладываемые граничные условия. Один торец образца жестко закрепляли от перемещений. Для моделирования растяжения на втором торце прикладывали смещения вдоль оси образца, а для моделирования кручения — крутящий момент вокруг этой оси.

Моделировали деформирование по двухзвенным ломаным траекториям № 1 и № 2 с углом излома 90° [13], заданным в плоскости $\Theta_1 - \Theta_3$ (рис. 8), где

$$\Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} \epsilon_{11} - \frac{1}{3} \epsilon_{22} - \frac{1}{3} \epsilon_{33} \right); \quad \Theta_3 = \sqrt{2} \epsilon_{12}.$$

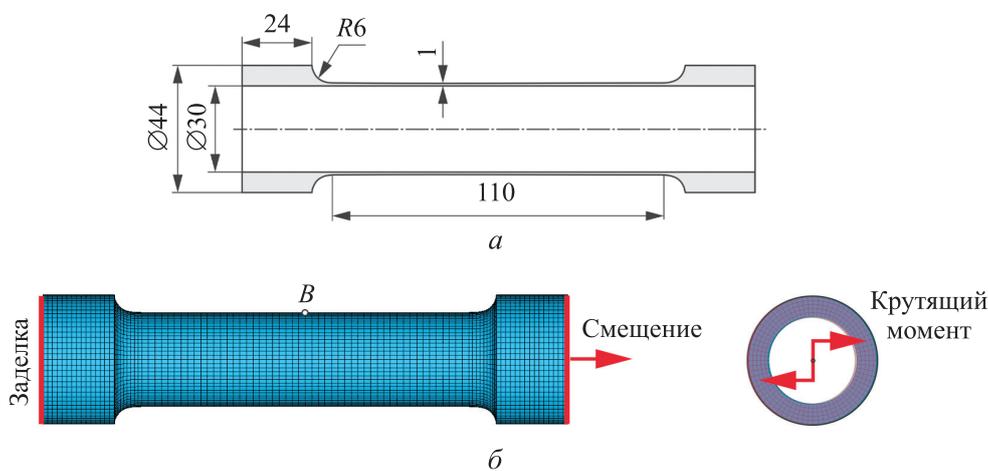


Рис. 7. Эскиз (а) и расчетная модель (б) трубчатого образца

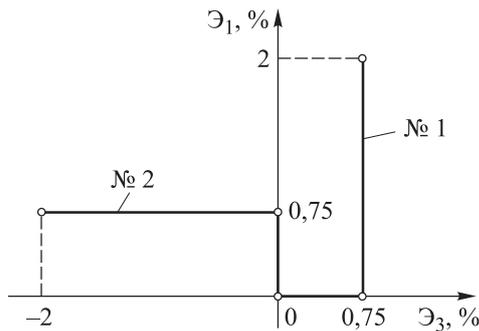


Рис. 8. Результаты моделирования двухзвенных ломаных траекторий деформирования

Траектория № 1 соответствует нагружению крутящим моментом до достижения деформацией \mathcal{E}_3 значения 0,75 %, а после, при поддержании $\mathcal{E}_3 = 0,75$ %, — растяжению путем постепенного увеличения смещений торца. При деформировании по траектории № 2 образец сначала растягивают до достижения деформацией \mathcal{E}_1 значения 0,75 %, а после, при поддержании $\mathcal{E}_1 = 0,75$ %, постепенно увеличивают крутящий момент.

Так как первое звено траекторий № 1 и № 2 соответствует деформированию в упругой области, нагрузку прикладывали за один шаг. На втором звене нагрузку ступенчато увеличивали, пошагово нагружая образец. Для сохранения постоянных значений \mathcal{E}_3 и \mathcal{E}_1 на втором звене траекторий поддерживать приложенную в конце первого звена нагрузку недостаточно — изменение свойств материала, связанное с накоплением пластических деформаций, приводит к росту \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_3 . Подбор нагрузки перед основным расчетом осуществляли итерационно, проводя серию предварительных расчетов для обеспечения 0,75 % по \mathcal{E}_3 или \mathcal{E}_1 в зависимости от траектории в узле В середины рабочей части (см. рис. 7, б).

Расчет выполняли с УТ Хосфорда при $h = 100$ (далее — с УТ Треска, что обосновано выше), а также с УТ Мизеса и Карафиллиса — Бойсе при $b = 50$ (далее — с УТ Ишлинского — Хилла) для сравнения результатов расчетов.

Результаты моделирования приведены на рис. 9, а–з. Все напряжения и деформации соответствуют узлу В (см. рис. 7, б). При построении графиков использовали обозначения девиаторного пространства А.А.Ильюшина для напряжений [13]

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} \sigma_{11} - \frac{1}{3} \sigma_{22} - \frac{1}{3} \sigma_{33} \right);$$

$$S_3 = \sqrt{2} \sigma_{12}; \quad \sigma = \sqrt{S_1^2 + S_3^2},$$

а также для длины траектории деформирования

$$s = \mathcal{E}_1^0 + \mathcal{E}_3^0 + |\mathcal{E}_1| + |\mathcal{E}_3|,$$

длины траектории деформирования на втором звене

$$\Delta s = s - \mathcal{E}_1^0 - \mathcal{E}_3^0,$$

и угла сближения

$$\theta = \arccos \frac{S_1 (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1^0) + S_3 (\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_3^0)}{\sigma \Delta s},$$

где \mathcal{E}_1^0 и \mathcal{E}_3^0 — значения компонент \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_3 в точке излома траектории.

Дополнительно на рис. 9, в и г приведены расчетные диаграммы деформирования при растяжении и кручении, чтобы показать глубину «нырка» и темпы восстановления скалярных свойств после излома траектории.

Для материалов, чувствительных к виду НДС, известен эффект \mathcal{E}_2 или эффект расщепления деформаций [13, 15] — компоненты ϵ_{22} и ϵ_{33} перестают быть равными в процессе упругопластического деформирования, отличной от нуля становится компонента $\mathcal{E}_2 = (1/\sqrt{2})(\epsilon_{22} - \epsilon_{33})$. В работе [13] указано, что значение компоненты \mathcal{E}_2 в испытаниях не превышало 7 % значения \mathcal{E} .

Проявление эффекта \mathcal{E}_2 в проведенных расчетах отражено на рис. 10. Дополнительно на рис. 11 приведены зависимости параметров вида НДС L и η от длины траектории деформирования s .

Анализ результатов расчетов. Теория течения с изотропным упрочнением и УТ Треска удовлетворительно описывает деформирование сплава В95 по двухзвенным ломаным с углом излома 90° и окончанием первого звена в упругой зоне (см. рис. 9, а–ж). Использование УТ J_2 – J_3 позволяет описать проявления нарушения постулата изотропии для сплава В95.

Расчетные кривые при растяжении с предварительным кручением (траектория № 1), полученные с помощью УТ Мизеса и Ишлинского — Хилла, очень близки. Расчет с применением УТ Треска демонстрирует меньший след запаздывания по векторным свойствам (различия лежат в рамках разброса свойств), а также значительное проявление эффекта \mathcal{E}_2 — компонента \mathcal{E}_2 достигает 20 % значения \mathcal{E} (см. рис. 10).

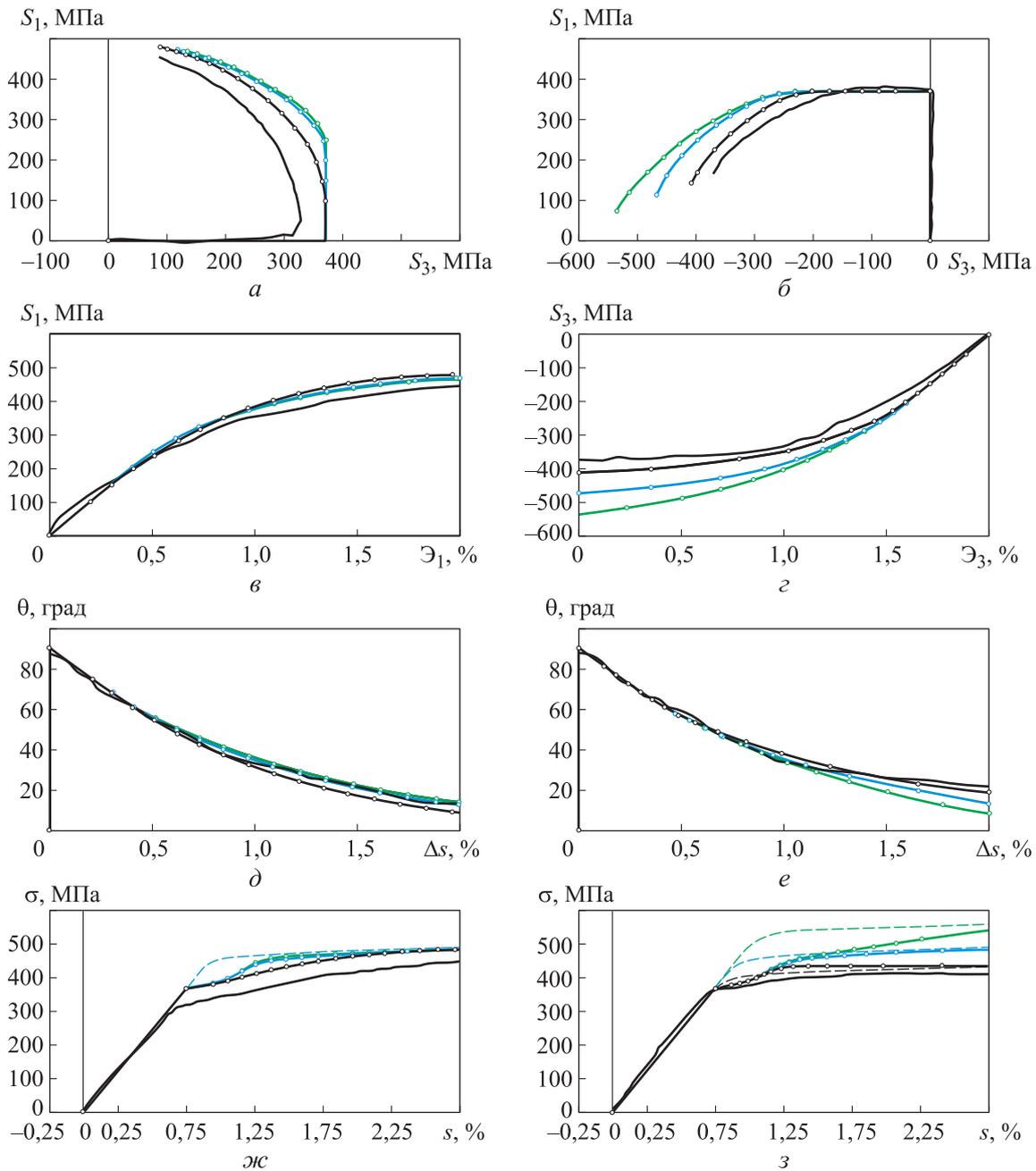


Рис. 9. Результаты моделирования, полученные путем эксперимента (—) и расчета с использованием УТ Ишлинского — Хилла (—), Мизеса (—), Треска (—), Ишлинского — Хилла при кручении (—), Мизеса при растяжении/кручении (—) и Треска при кручении (—):
 а и б — отклики напряжений для траекторий № 1 и 2;
 в и г — диаграммы деформирования в плоскости $E_1 - S_1$ для траектории № 1 и $E_3 - S_3$ для траектории № 2;
 д и е — векторные свойства для траекторий № 1 и № 2;
 ж и з — скалярные свойства для траекторий № 1 и № 2

Параметры вида НС, полученные с использованием различных УТ, очень близки на всех этапах расчета и до исчерпания второго звена траектории достигают значений, соответствующих одноосному растяжению (см. рис. 11).

Расчетные кривые при кручении с предварительным растяжением (траектория № 2), полученные с использованием различных УТ, су-

щественно различаются (см. рис. 9, а-ж). Расчет с использованием УТ Треска демонстрирует больший след запаздывания по векторным свойствам, а также значительное проявление эффекта Э2 — компонента Э2 достигает 15 % значения Э (см. рис. 10).

На диаграмме скалярных свойств проявляется интересное явление — после «нырка» рас-

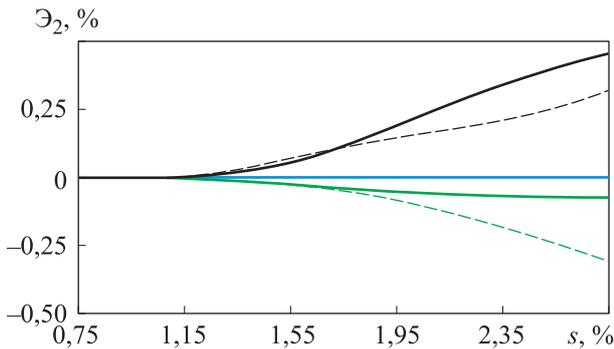


Рис. 10. Расчетные зависимости эффекта ε_2 от длины траектории деформирования s , полученные с использованием различных УТ: — и — — УТ Ишлинского — Хилла для траекторий № 1 и № 2; — и — — УТ Мизеса для траекторий № 1 и № 2; — и — — УТ Треска для траекторий № 1 и № 2

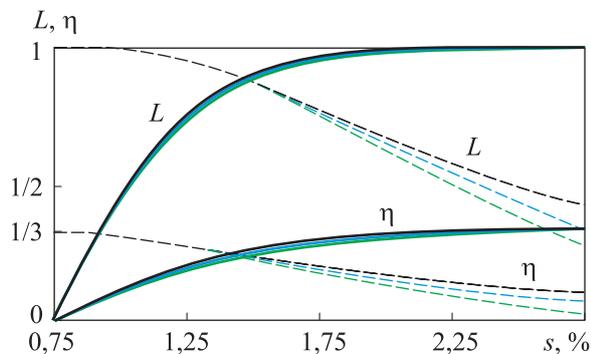


Рис. 11. Расчетные зависимости параметров вида НС L и η от длины траектории деформирования s , полученные с использованием различных УТ: — и — — УТ Ишлинского — Хилла для траекторий № 1 и № 2; — и — — УТ Мизеса для траекторий № 1 и № 2; — и — — УТ Треска для траекторий № 1 и № 2

четная кривая пересекает кривую чистого кручения, дальше кривые сближаются, но расчетная кривая находится над кривой чистого кручения.

Различия между параметрами вида НС растут с увеличением длины пройденного по траектории пути и не достигают значений, соответствующих чистому кручению к исчерпанию второго звена (см. рис. 11). Вид НС, полученный с использованием УТ Треска, является более жестким, что может приводить к меньшему прогнозируемому значению разрушающей нагрузки. Так как после «нырка» расчетные скалярные свойства возвращаются на кривые чистого кру-

чения, можно считать, что различия по расчетным эквивалентным напряжениям, полученным с разными УТ J_2 – J_3 , лежат в пределах $\pm 15\%$ эквивалентных напряжений, рассчитанных с использованием УТ Мизеса.

Выводы

1. Анализ известных однопараметрических УТ J_2 – J_3 показал, что УТ Хосфорда и УТ Карафиллиса — Бойсе в совокупности позволяют приблизить все возможные выпуклые и симметричные относительно главных осей УТ, заключенные между УТ Треска и УТ Ишлинского — Хилла, включая их как предельные случаи.

2. Предложена методика выбора УТ и определения его параметров по диаграмме деформирования при растяжении и отношению пределов текучести при растяжении и кручении.

3. Результаты моделирования деформирования для сплава В95 по двухзвенным ломаным траекториям с углом излома 90° и окончанием первого звена в упругой зоне с использованием модели пластического течения с изотропным упрочнением и УТ Треска, выбранным в соответствии с предложенной методикой, свидетельствуют об удовлетворительном совпадении с данными испытаний.

4. Показано, что использование УТ Хосфорда и Карафиллиса — Бойсе позволяет описать проявления нарушения постулата изотропии и эффект ε_2 — приобретенное в процессе упругопластического деформирования различие между компонентами деформаций ε_{22} и ε_{33} .

5. Существенной зависимости от УТ результатов моделирования растяжения с предварительным кручением не выявлено, вид НС достаточно быстро переходит от чистого кручения к одноосному растяжению.

6. Результаты моделирования кручения с предварительным растяжением зависят от УТ: эквивалентные напряжения различаются в пределах 15% , а вид НС остается промежуточным между одноосным растяжением и чистым кручением, причем УТ Треска обеспечивает более близкий к одноосному растяжению вид НС.

Литература

- [1] Громов В.И., Якушева Н.А., Востриков А.В. и др. Высокопрочные конструкционные стали для валов газотурбинных двигателей (обзор). *Авиационные материалы и технологии*, 2021, № 1, с. 3–12, doi: <https://doi.org/10.18577/2713-0193-2021-0-1-3-12>

- [2] Кузьмин Е.П., Серветник А.Н. Исследование поверхности нагружения материалов дисков газотурбинных двигателей при разгонных испытаниях модельных дисков. *Наука и образование: научное издание*, 2014, № 5. EDN: SKCZKJ
- [3] Серветник А.Н. Моделирование несущей способности диска турбины АГТД. *Справочник. Инженерный журнал*, 2012, № 10, с. 44–49.
- [4] Nozhnitsky Y.A., Servetnik A.N. Prevention of hazardous failure of the turbine rotor due to its overspeed. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 449, pp. 12–25, doi: <http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/449/1/012025>
- [5] Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. Москва, Машиностроение, 1975. 399 с.
- [6] Hosford W.F. Generalized isotropic yield criterion. *J. Appl. Mech.*, 1972, vol. 39, no. 2, pp. 607–609, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3422732>
- [7] Drucker D.C. Relation of experiments to mathematical theories of plasticity. *J. Appl. Mech.*, 1949, vol. 16, no. 4, pp. 349–357, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4010009>
- [8] Revil-Baudard B., Cazacu O., Chandola N. Effect of the yield stresses in uniaxial tension and pure shear on the size of the plastic zone near a crack. *Int. J. Plast.*, 2018, vol. 102, pp. 101–117, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.12.006>
- [9] Karafillis A.P., Boyce M.C. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, vol. 42, no. 12, pp. 1859–1886, doi: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90073-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90073-0)
- [10] Owen D.J.R., Hinton E. *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Prentice Hall, 1980. 594 p.
- [11] Худякова А.Д., Курышев И.М., Сапронов Д.В. Пользовательская модель пластического течения с изотропным упрочнением и поверхностью нагружения Хосфорда («Hosford UserMat»). Свид. о рег. прог. для ЭВМ № 2024660541 от 07.05.2024.
- [12] Худякова А.Д., Сапронов Д.В., Курышев И.М. Адаптация алгоритма возврата на поверхность нагружения к условию текучести Хосфорда. *Авиационные двигатели*, 2024, № 4, с. 93–106.
- [13] Зубчанинов В.Г., Гулятьев В.И., Алексеев А.А. и др. Проверка постулата изотропии при деформировании сплава В95 по двухзвенным ломаным траекториям. *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика*, 2023, № 5, с. 47–52, doi: <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-64-5-7>
- [14] Ильюшин А.А. *Механика сплошной среды*, Москва, МГУ, 1990. 310 с.
- [15] Бондарь В.С., Абашев Д.Р. Пластическое деформирование материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018, № 1, с. 29–39, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.1.03>

References

- [1] Gromov V.I., Yakusheva N.A., Vostrikov A.V. et al. High strength structural steels for gas-turbine engine shafts (review). *Aviatsionnye materialy i tekhnologii* [Aviation Materials and Technologies], 2021, no. 1, pp. 3–12, doi: <https://doi.org/10.18577/2713-0193-2021-0-1-3-12> (in Russ.).
- [2] Kuzmin E.P., Servetnik A.N. Yield surface investigation of alloys during model disk spin tests. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie* [Science and Education: Scientific Publication], 2014, no. 5. EDN: SKCZKJ (in Russ.).
- [3] Servetnik A.N. Load-carrying capability simulation of aviation gas turbine engine disk. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal* [Handbook. An Engineering Journal], 2012, no. 10, pp. 44–49. (In Russ.).
- [4] Nozhnitsky Y.A., Servetnik A.N. Prevention of hazardous failure of the turbine rotor due to its overspeed. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 449, pp. 12–25, doi: <http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/449/1/012025>
- [5] Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 399 p. (In Russ.).
- [6] Hosford W.F. Generalized isotropic yield criterion. *J. Appl. Mech.*, 1972, vol. 39, no. 2, pp. 607–609, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3422732>

- [7] Drucker D.C. Relation of experiments to mathematical theories of plasticity. *J. Appl. Mech.*, 1949, vol. 16, no. 4, pp. 349–357, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4010009>
- [8] Revil-Baudard B., Cazacu O., Chandola N. Effect of the yield stresses in uniaxial tension and pure shear on the size of the plastic zone near a crack. *Int. J. Plast.*, 2018, vol. 102, pp. 101–117, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.12.006>
- [9] Karafillis A.P., Boyce M.C. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, vol. 42, no. 12, pp. 1859–1886, doi: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90073-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90073-0)
- [10] Owen D.J.R., Hinton E. *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Prineridge Press, 1980. 594 p.
- [11] Khudyakova A.D., Kuryshv I.M., Sapronov D.V. *Polzovatel'skaya model plasticheskogo techeniya s izotropnym uprochneniem i poverkhnostyu nagruzheniya Khosforda («Hosford UserMat»)* [A user-defined plastic flow model with isotropic hardening and Hosford loading surface (Hosford UserMat)]. Software registration certificate no. 2024660541 of 07.05.2024. (In Russ.).
- [12] Khudyakova A.D., Sapronov D.V., Kuryshv I.M. Adaptation of the return-mapping algorithm to the Hosford yield criterion. *Aviatsionnye dvigateli* [Aviation Engines], 2024, no. 4, pp. 93–106. (In Russ.).
- [13] Zubchaninov V.G., Gulyaev V.I., Alekseev A.A. et al. Testing the isotropy postulate at deformation of V95 aluminum alloy along two-link polygonal-chain trajectories. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika*, 2023, no. 5, pp. 47–52, doi: <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-64-5-7> (in Russ.). (Eng. version: *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2023, vol. 78, no. 5, pp. 128–133, doi: <https://doi.org/10.3103/S0027133023050059>)
- [14] Plyushin A.A. *Mekhanika splushnoy sredy* [Mechanics of continuum medium]. Moscow, MGU Publ., 1990. 310 p. (In Russ.).
- [15] Bondar V.S., Abashev D.R. Plastic deformation of materials sensitive to a type of stress state. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2018, no. 1, pp. 29–39, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.1.03> (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 30.07.2025

Информация об авторах

ХУДЯКОВА Анастасия Дмитриевна — старший научный сотрудник. ФАУ «ЦИАМ им. П.И. Баранова» (111116, Москва, Российская Федерация, Авиамоторная ул., д. 2); доцент кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: adkhudyakova@ciam.ru).

САПРОНОВ Дмитрий Владимирович — начальник сектора. ФАУ «ЦИАМ им. П.И. Баранова» (111116, Москва, Российская Федерация, Авиамоторная ул., д. 2); доцент кафедры «Ракетно-космические композитные конструкции». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: dvsapronov@ciam.ru).

Information about the authors

KHUDYAKOVA Anastasia Dmitrievna — Senior Researcher. Central Institute of Aviation Motors (111116, Moscow, Russian Federation, Aviamotornaya St., Bldg. 2); Associate Professor, Department of Applied Mathematics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: adkhudyakova@ciam.ru).

SAPRONOV Dmitry Vladimirovich — Head of Sector. Central Institute of Aviation Motors (111116, Moscow, Russian Federation, Aviamotornaya St., Bldg. 2); Associate Professor, Rocket and Space Composite Design Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., 5, Bldg. 1, e-mail: dvsapronov@ciam.ru).

БАБИНЕЦ Илья Сергеевич — инженер-конструктор. ФАУ «ЦИАМ им. П.И. Баранова» (111116, Москва, Российская Федерация, Авиамоторная ул., д. 2, e-mail: isbabinets@ciam.ru).

BABINETS Ilya Sergeevich — Design Engineer. Central Institute of Aviation Motors (111116, Moscow, Russian Federation, Aviamotornaya St., Bldg. 2, e-mail: isbabinets@ciam.ru).

КУРЫШЕВ Иван Михайлович — инженер. ФАУ «ЦИАМ им. П.И. Баранова» (111116, Москва, Российская Федерация, Авиамоторная ул., д. 2); ассистент кафедры «Ракетно-космические композитные конструкции». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: imkuryshhev@ciam.ru).

KURYSHEV Ivan Mikhailovich — Engineer. Central Institute of Aviation Motors (111116, Moscow, Russian Federation, Aviamotornaya St., Bldg. 2); Assistant, Rocket and Space Composite Design Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., 5, Bldg. 1, e-mail: imkuryshhev@ciam.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Худякова А.Д., Сапронов Д.В., Бабинец И.С., Курышев И.М. Оценка влияния условий текучести J_2 – J_3 на напряженное состояние трубчатых образцов для подтверждения статической прочности валов газотурбинных двигателей. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 11, с. 136–149.

Please cite this article in English as:

Khudyakova A.D., Sapronov D.V., Babinets I.S., Kuryshhev I.M. Evaluation of the influence of yield conditions J_2 – J_3 on the stress state of tubular specimens to confirm the static strength of gas turbine shafts. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 11, pp. 136–149.



**Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
предлагает читателям учебное пособие**

«Основы объемного гидропривода. Статика»

Автор О.Ф. Никитин

Содержит основы конструирования и статических гидравлических расчетов в области создания и совершенствования объемного гидропривода.

Для студентов, изучающих дисциплины «Основы объемного гидропривода» и «Гидропривод стационарных и мобильных объектов».

Пособие может быть полезно студентам МГТУ им. Н.Э. Баумана всех уровней обучения (бакалавриат, магистратура, специалитет) при изучении теоретических основ и выполнении домашних заданий и курсовых работ по дисциплинам «Техническая гидромеханика», «Гидропривод» и «Объемный гидропривод».

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;

press@bmstu.ru; <https://press.bmstu.ru>