

УДК 531.8, 621.01

# Решение обратной задачи о положениях сферического механизма параллельной структуры с линейными приводами\*

А.А. Хрестина<sup>1</sup>, П.А. Ларюшкин<sup>2</sup>, Ю.В. Синицына<sup>2</sup>, А.В. Антонов<sup>1</sup><sup>1</sup> ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана

## Inverse Kinematics of the Spherical Parallel Mechanism with Linear Actuators

A.A. Khrestina<sup>1</sup>, P.A. Laryushkin<sup>2</sup>, Yu.V. Sinitsyna<sup>2</sup>, A.V. Antonov<sup>1</sup><sup>1</sup> Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University

Предложен алгоритм решения обратной задачи о положениях для сферического механизма параллельной структуры, отличительной особенностью которого является использование линейных приводов. На подробном примере одной из трех кинематических цепей механизма выведено уравнение связи и приведено его аналитическое решение. Для двух других кинематических цепей уравнения связи и их решения получены по аналогии с первой цепью. Решение обратной задачи о положениях является первым и важнейшим этапом, необходимым для последующего анализа кинематики, динамики и рабочей зоны механизма параллельной структуры.

EDN: NDHGTA, <https://elibrary/ndhgta>

**Ключевые слова:** механизм параллельной структуры, кинематика механизма, сферический механизм, линейные приводы, обратная задача о положениях

The article discusses an algorithm for solving the inverse kinematics for a spherical parallel mechanism, whose distinctive feature is the use of linear drives. Using a detailed example of one of the three kinematic chains of the mechanism, the constraint equation is derived and its analytical solution is presented. For the other two kinematic chains, the constraint equations and their solutions are obtained by analogy with the first chain. Solving the inverse kinematics is the first and most important stage necessary for the subsequent analysis of the kinematics, dynamics, and workspace of the mechanism.

EDN: NDHGTA, <https://elibrary/ndhgta>

**Keywords:** parallel mechanism, kinematics of the mechanism, spherical mechanism, linear drives, inverse kinematics

\* Работа выполнена за счет средств Государственного задания, код (шифр) научной темы, присвоенной учредителем (организацией) FFGU-2024-0016.

Механизмы параллельной структуры (МПС), в которых выходное звено (ВЗ) и основание соединены несколькими кинематическими цепями (КЦ), все чаще находят применение в различных отраслях техники ввиду таких преимуществ над классическими устройствами последовательной структуры, как более высокая жесткость, точность позиционирования и возможность развивать высокую скорость движения благодаря меньшей массе подвижных частей [1–3].

Примерами успешного внедрения МПС служат платформы Гофа — Стюарта [4] и Delta [5], применяемые в авиасимуляторах, платформах стабилизации, упаковочных системах, станках, 3D-принтерах и т. п. Также такие схемы вдохновили различных исследователей на создание многочисленных механизмов, расширяющих функциональные возможности исходных прототипов [6, 7].

Среди различных манипуляторов можно выделить так называемые сферические МПС, ВЗ которых имеет возможность вращения вокруг некоторой точки в пространстве, называемой центром вращения. Эти механизмы применяются в устройствах ориентации антенн, телескопов и оптических приборов, а также в медицинском оборудовании, включая устройства для реабилитации [8–13].

Для такой области применения одной из важнейших характеристик является точность позиционирования. При определенных условиях, например при значительных колебаниях температуры внешней среды, использование вращательных приводов может быть сопряжено с определенными недостатками. Так, зазоры в механических передачах привода поворота механизма ориентации с последовательной структурой будут изменяться в зависимости от температуры, что может привести к их заклиниванию или увеличению погрешности позиционирования.

Рассмотрим сферический МПС с линейными приводами, температурные изменения в которых при определенных условиях можно компенсировать простыми методами.

Одна из главных задач при анализе механизмов последовательной и параллельной структуры — задача о положениях, решение которой является необходимым этапом для последующего анализа кинематики, динамики и рабочей зоны. При этом для МПС, в том числе рассматриваемого сферического механизма,

наибольшее значение имеет именно обратная задача о положениях (ОЗП) [14].

Цель работы — решение ОЗП для сферического МПС.

**Структура сферического МПС.** Рассмотрим структуру исследуемого МПС (рис. 1).

Рассматриваемый механизм включает в себя неподвижное основание, ВЗ, способное совершать только сферическое движение вокруг неподвижного центра вращения (точки  $O$ ), и три КЦ, соединяющие основание с ВЗ. Каждая  $i$ -я цепь ( $i = 1, 2, 3$ ) соединена с ВЗ посредством вращательной кинематической пары (шарнира)  $A_i$ . Оси указанных пар всех трех КЦ проходят через центр вращения  $O$  и являются взаимно ортогональными.

В каждой КЦ пара  $A_i$  связана промежуточным звеном с вращательной парой  $B_i$ , а пара  $B_i$  — с вращательной парой  $C_i$ . При любой ориентации ВЗ оси пар  $A_i$ ,  $B_i$  и  $C_i$  всегда пересекаются под прямым углом. Пара  $C_i$  является частью плоской диады, в состав которой помимо нее входят соединенная с основанием вращательная пара  $D_i$  и приводная призматическая пара  $P_i$ . Плоскости, где расположены диады КП, взаимно ортогональны.

Такая конфигурация обеспечивает симметрию формы рабочей зоны сферического МПС при условии, что все геометрические размеры в КЦ одинаковые.

В дальнейших расчетах будем считать, что центр вращения  $O$  является началом неподвижной декартовой системы координат  $Oxyz$ .

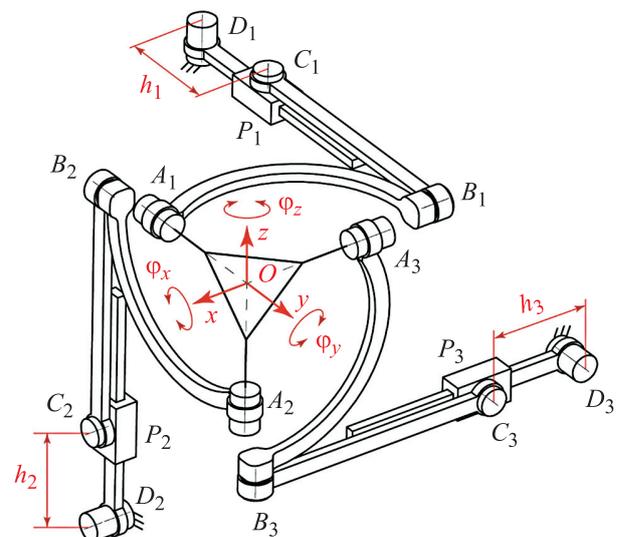


Рис. 1. Схема исследуемого МПС

Направление ее осей выбираем так, чтобы плоскости, в которых расположены диады КЦ (точки  $C_i, D_i$  и, соответственно, отрезок  $C_iD_i$ ) лежали в плоскостях, образованных осями системы  $Oxuz$ . Кинематической цепи, в которой плоскость диады совпадает с плоскостью  $Oxy$ , присваиваем индекс «1», КЦ, где плоскость диады совпадает с плоскостью  $Oyz$ , — индекс «2», а КЦ, диада которой лежит в плоскости  $Ozx$ , — индекс «3».

### Решение обратной задачи о положениях.

Главным этапом решения ОЗП является получение уравнений связи, позволяющих установить зависимость между координатами ВЗ и перемещениями приводов. Для МПС в общем случае такие уравнения могут быть записаны только в неявной форме, но можно установить аналитическую зависимость приводных координат от координат ВЗ, тем самым решив ОЗП.

В рассматриваемом МПС координатами ВЗ являются углы поворота (углы Эйлера)  $\varphi_x, \varphi_y$  и  $\varphi_z$ , определяющие его ориентацию в пространстве, а приводными координатами — перемещения в призматических парах КЦ, которые удобно выражать в виде расстояния  $h_i$  между точками  $C_i$  и  $D_i$  в соответствующей КЦ.

Пусть  $Ox'y'z'$  — подвижная система координат, связанная с ВЗ (рис. 2).

В указанной системе координаты точки  $A_i$   $x'_{Ai}, y'_{Ai}, z'_{Ai}$  являются постоянными и определяются только геометрическими характеристиками ВЗ. Пусть последовательность поворотов ВЗ  $x \rightarrow y \rightarrow z$  (вращение осуществляется вокруг неподвижных осей). Тогда для любой ориентации ВЗ координаты точки  $A_i$  в системе  $Oxuz$  будут следующими:

$$\begin{bmatrix} x_{Ai} \\ y_{Ai} \\ z_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{Ai} \\ y'_{Ai} \\ z'_{Ai} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Так как в каждой КЦ шарниры  $A_i$  и  $B_i$  соединены жестким промежуточным звеном, расстояние между ними  $l_{AiBi}$  будет постоянным:

$$(x_{Bi} - x_{Ai})^2 + (y_{Bi} - y_{Ai})^2 + (z_{Bi} - z_{Ai})^2 = l_{AiBi}^2, \quad (2)$$

где  $x_{Bi}, y_{Bi}, z_{Bi}$  — координаты точки  $B_i$  в системе координат  $Oxuz$ .

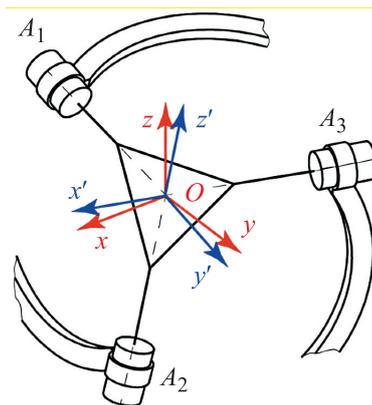


Рис. 2. Схема подвижной и неподвижной систем координат

В контексте решения ОЗП звено  $A_iB_i$  может только вращаться вокруг оси шарнира  $A_i$ , а значит, все возможные положения шарнира  $B_i$  ограничены окружностью, задающей основание конуса с высотой  $OA_i$  и образующей  $OB_i$ . Таким образом, длина отрезка  $OB_i$   $l_{OBi}$  остается постоянной при любой ориентации ВЗ. Точка  $O$  является началом системы  $Oxuz$ , а следовательно, ее координаты равны нулю:

$$x_{Bi}^2 + y_{Bi}^2 + z_{Bi}^2 = l_{OBi}^2. \quad (3)$$

Раскрывая скобки и преобразуя выражение (2), получаем

$$\begin{aligned} x_{Ai}x_{Bi} + y_{Ai}y_{Bi} + z_{Ai}z_{Bi} = \\ = \frac{x_{Ai}^2 + y_{Ai}^2 + z_{Ai}^2 + x_{Bi}^2 + y_{Bi}^2 + z_{Bi}^2 - l_{ABi}^2}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки выражения (3) в формулу (4) имеем

$$x_{Ai}x_{Bi} + y_{Ai}y_{Bi} + z_{Ai}z_{Bi} = \frac{l_{OAi}^2 + l_{OBi}^2 - l_{ABi}^2}{2}, \quad (5)$$

где  $l_{OAi}$  — расстояние между центром вращения  $O$  и точкой  $A_i$ , являющееся постоянной величиной в каждой КЦ.

Так как все параметры в правой части уравнения (5) постоянные, для краткости введем обозначение

$$l_i = \frac{l_{OAi}^2 + l_{OBi}^2 - l_{ABi}^2}{2} = \text{const.}$$

Рассмотрим первую КЦ. Движение шарнира  $B_1$  относительно оси шарнира  $C_1$  ограничено только возможностью вращения. Это значит, что точка  $B_1$  всегда будет находиться в плоскости диады первой КЦ, т. е. в плоскости  $Oxy$ , а следовательно, вне зависимости от ориента-

ции ВЗ,  $z_{B1}=0$ . Тогда для первой КЦ выражение (5) приобретает вид

$$x_{A1}x_{B1} + y_{A1}y_{B1} = l_1. \quad (6)$$

Левая часть уравнения (6) представляет собой скалярное произведение двух двумерных векторов:  $\mathbf{r}_{OA1} = [x_{A1} \ y_{A1}]^T$  и  $\mathbf{r}_{OB1} = [x_{B1} \ y_{B1}]^T$ . Длина вектора  $\mathbf{r}_{OA1}$  равна величине проекции отрезка  $OA_1$  на плоскость  $Oxy$ , а длина вектора  $\mathbf{r}_{OB1}$  —  $l_{OB1}$ , так как точка  $B_1$  всегда находится в плоскости ввиду принятых геометрических характеристик рассматриваемого МПС.

С учетом этого выражение (6) можно представить как

$$l_{OB1} \sqrt{x_{A1}^2 + y_{A1}^2} \cos \alpha_1 = l_1, \quad (7)$$

где  $\alpha_1$  — угол между векторами  $\mathbf{r}_{OA1}$  и  $\mathbf{r}_{OB1}$  (рис. 3).

Вектор  $\mathbf{r}_{OB1}$  можно получить поворотом вокруг оси  $z$  на угол  $\alpha_1$  некоторого вектора длиной  $l_{OB1}$ , направление которого совпадает с направлением вектора  $\mathbf{r}_{OA1}$ . Отсюда следует, что координаты  $x_{B1}$  и  $y_{B1}$  связаны с координатами  $x_{A1}$  и  $y_{A1}$  следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \frac{l_{OB1}}{\sqrt{x_{A1}^2 + y_{A1}^2}} \begin{bmatrix} x_{A1} \\ y_{A1} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Из формулы (7) выражаем угол между векторами  $\mathbf{r}_{OA1}$  и  $\mathbf{r}_{OB1}$

$$\alpha_1 = \pm \arccos \left( \frac{l_1}{l_{OB1} \sqrt{x_{A1}^2 + y_{A1}^2}} \right). \quad (9)$$

Важно отметить, что выражения (8) и (9) становятся неопределенными, если координаты  $x_{A1}$  и  $y_{A1}$  одновременно равны нулю, так как в этом случае имеет место деление на ноль. Равенство нулю указанных координат означает,

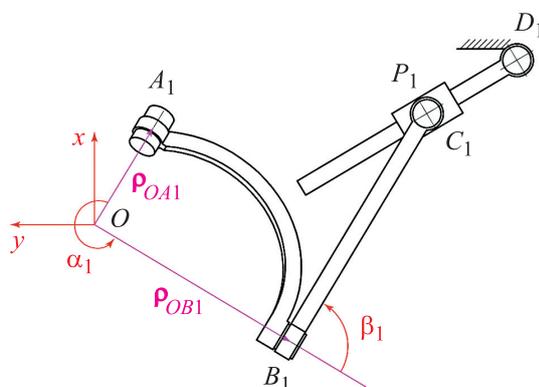


Рис. 3. Схема первой КЦ (вид на плоскость  $Oxy$ )

что шарнир  $A_1$  должен лежать на оси  $z$ , а значит, его ось совпадает с осью  $z$ , т. е. становится параллельной осям вращательных пар  $C_1$  и  $D_1$ , входящих в плоскую диаду КЦ. В результате ВЗ теряет возможность вращения вокруг оси, перпендикулярной осям шарниров  $A_1$  и  $B_1$ , что соответствует попаданию МПС в особое положение первого типа по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса [15].

С одной стороны, в любой КЦ перемещение точки  $B_i$  относительно точки  $A_i$  ограничено только возможностью вращения вокруг оси последней, т. е. для некоторого заданного положения пары  $A_i$  в пространстве все возможные положения пары  $B_i$  будут ограничены окружностью, которая расположена в плоскости, перпендикулярной оси пары  $A_i$ . С другой стороны, в соответствии с выбранной структурой КЦ пара  $B_i$  всегда находится в плоскости диады.

В общем случае указанные плоскость и окружность имеют две точки пересечения, в которых и должна располагаться пара  $B_i$ . Например, для рассмотренного примера первой КЦ эти точки определяются по двум возможным значениям угла  $\alpha_1$  согласно выражению (9). В случае же, когда в какой-либо КЦ ось пары  $A_i$  перпендикулярна плоскости диады, окружность, соответствующая возможным положениям пары  $B_i$ , будет расположена в указанной плоскости, а значит, ОЗП для этой КЦ будет иметь бесконечное число решений.

Так как пары  $B_1$  и  $C_1$  расположены на противоположных концах общего промежуточного звена, расстояние  $l_{B1C1}$  между соответствующими точками будет постоянным независимо от ориентации ВЗ. И эти пары, и промежуточное звено будут всегда находиться в плоскости  $Oxy$ , а значит, координаты точки  $C_1$   $x_{C1}$  и  $y_{C1}$  можно получить поворотом на угол  $\beta_1$  (рис. 3) некоторого вектора длиной  $l_{B1C1}$  с началом в точке  $B_1$ , направление которого совпадает с направлением вектора  $\mathbf{r}_{OB1}$ :

$$\begin{bmatrix} x_{C1} \\ y_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{bmatrix} \frac{l_{B1C1}}{l_{OB1}} \begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Угол  $\beta_1$ , задаваемый геометрическими характеристиками МПС, является постоянной величиной.

Зная координаты точек  $C_1$  и  $D_1$  (для рассматриваемого МПС  $z_{C1}=0$ ,  $z_{D1}=0$ ), можно записать следующее уравнение:

$$(x_{D1} - x_{C1})^2 + (y_{D1} - y_{C1})^2 - h_1^2 = 0, \quad (11)$$

где  $x_{D1}$  и  $y_{D1}$  — координаты точки  $D_1$ ;  $h_1$  — приводная координата первой КЦ.

Координаты точки  $C_1$  можно вычислить с помощью выражения (10), если известны координаты точки  $B_1$ , определяемые выражением (8). Чтобы использовать выражение (8), необходимо по формуле (1) найти координаты точки  $A_1$  для некоторой ориентации ВЗ, задаваемой углами поворота  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$ . После последовательной подстановки соотношения (1) в выражение (8), а затем (8) в (11), получим формулу, которая содержит как выходные координаты, так и приводную координату первой КЦ  $h_1$ , т. е. она будет являться уравнением связи для первой КЦ.

Для решения ОЗП для первой КЦ достаточно выразить координату  $h_1$  из уравнения (11):

$$h_1 = \sqrt{(x_{D1} - x_{C1})^2 + (y_{D1} - y_{C1})^2}. \quad (12)$$

Следует отметить, что применение в формуле (12) знака «±» перед корнем не требуется, так как физически расстояние между точками  $C_1$  и  $D_1$  может выражаться только положительным числом, а значит, уравнение (11) будет иметь только одно решение относительно координаты  $h_1$ .

При решении ОЗП для второй и третьей КЦ можно следовать той же логике, что и для первой КЦ. Для второй КЦ все приведенные ранее рассуждения и выкладки будут справедливыми, если циклично сдвинуть координаты всех точек на одну вправо, т. е. на место координаты  $x$  поставить координату  $y$ , на место  $y$  — координату  $z$ , а на место  $z$  — координату  $x$ .

Так как  $x_{B2} = 0$ , координаты точки  $B_2$  будут следующими:

$$\begin{bmatrix} y_{B2} \\ z_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \frac{l_{OB2}}{\sqrt{y_{A2}^2 + z_{A2}^2}} \begin{bmatrix} y_{A2} \\ z_{A2} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где

$$\alpha_2 = \pm \arccos \left( \frac{l_2}{l_{OB2} \sqrt{y_{A2}^2 + z_{A2}^2}} \right);$$

$l_{OB2}$  — расстояние между центром вращения  $O$  и точкой  $B_2$ .

Точка  $C_2$  будет иметь следующие координаты:  $x_{C2} = 0$ ;

$$\begin{bmatrix} y_{C2} \\ z_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{B2} \\ z_{B2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \frac{l_{B2C2}}{l_{OB2}} \begin{bmatrix} y_{B2} \\ z_{B2} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $l_{B2C2}$  — расстояние между точками  $B_2$  и  $C_2$ .

Координаты точки  $D_2$  определяются геометрическими характеристиками сферического МПС и являются постоянными, причем  $x_{D2} = 0$ . Уравнение связи для второй КЦ имеет вид

$$(y_{D2} - y_{C2})^2 + (z_{D2} - z_{C2})^2 - h_2^2 = 0, \quad (15)$$

где  $h_2$  — приводная координата второй КЦ.

Как и для первой КЦ, путем последовательной подстановки (1) в (13), (13) в (14) и (14) в (15) связываем выходные координаты МПС с приводной координатой второй КЦ  $h_2$ , которую выражаем из уравнения (15)

$$h_2 = \sqrt{(y_{D2} - y_{C2})^2 + (z_{D2} - z_{C2})^2}. \quad (16)$$

Выражение (16) является решением ОЗП для второй КЦ.

В третьей КЦ координаты  $y_{B3}$ ,  $y_{C3}$  и  $y_{D3}$  будут равны нулю. Оставшиеся координаты точки  $B_3$  определяются как

$$\begin{bmatrix} z_{B3} \\ x_{B3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix} \frac{l_{OB3}}{\sqrt{z_{A3}^2 + x_{A3}^2}} \begin{bmatrix} z_{A3} \\ x_{A3} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где

$$\alpha_3 = \pm \arccos \left( \frac{l_3}{l_{OB3} \sqrt{z_{A3}^2 + x_{A3}^2}} \right),$$

$l_{OB3}$  — расстояние между центром вращения  $O$  и точкой  $B_3$ .

Координаты точки  $C_3$  будут следующими:

$$\begin{bmatrix} z_{C3} \\ x_{C3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{B3} \\ x_{B3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & -\sin \beta_3 \\ \sin \beta_3 & \cos \beta_3 \end{bmatrix} \frac{l_{B3C3}}{l_{OB3}} \begin{bmatrix} z_{B3} \\ x_{B3} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где  $l_{B3C3}$  — расстояние между точками  $B_3$  и  $C_3$ .

Уравнение связи для третьей КЦ запишем как

$$(z_{D3} - z_{C3})^2 + (x_{D3} - x_{C3})^2 - h_3^2 = 0, \quad (19)$$

где  $h_3$  — приводная координата третьей КЦ.

Как и для первой и второй КЦ, углы поворота  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  можно связать с приводной координатой  $h_3$  путем последовательной подстановки (1) в (17), (17) в (18) и (18) в (19).

Решение ОЗП для третьей КЦ получаем из выражения

$$h_3 = \sqrt{(z_{D3} - z_{C3})^2 + (x_{D3} - x_{C3})^2}. \quad (20)$$

Для решения ОЗП механизма в целом необходимо, чтобы значения приводных координат, получаемые с помощью выражений (12), (16) и (20), представляли собой действительные числа. В противном случае нельзя достигнуть ориен-

тации ВЗ, для которой решают ОЗП. Следует отметить, что теоретически ОЗП всегда будет иметь решение, если величина  $h_i$  не ограничена. Однако в реальных условиях указанная величина, безусловно, будет иметь ограничения. Так как в каждой КЦ существуют две возможные конфигурации промежуточных звеньев (зависящих от угла  $\alpha_i$ ) для одной и той же ориентации ВЗ, в общем случае число решений ОЗП будет равно восьми.

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет получать аналитическое решение ОЗП сферического МПС с линейными приводами. Решение этой задачи является важным этапом, позволяющим в дальнейшем анализировать рабочую зону механизма (включая ис-

следование точек особых положений) и исследовать его кинематику и динамику.

## Выводы

1. Разработан алгоритм аналитического решения ОЗП сферического манипулятора с линейными приводами. Полученные зависимости позволяют вычислять приводные координаты для любой заданной ориентации ВЗ. Установлено, что в общем случае для рассмотренного МПС существуют восемь решений ОЗП.

2. В дальнейшем предложенный алгоритм можно использовать для анализа кинематики и динамики механизма, а также для исследования его рабочей зоны.

## Литература

- [1] Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. *Пространственные механизмы параллельной структуры*. Москва, Наука, 1991. 94 с.
- [2] Merlet J.-P. *Parallel robots*. Springer, 2006. 402 p.
- [3] Глазунов В.А. *Механизмы параллельной структуры и их применение*. Москва-Ижевск, ИКИ, 2018. 1035 с.
- [4] Stewart D. A platform with six degrees of freedom. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 1965, vol. 180-1, no. 15, pp. 371–386.
- [5] Clavel R. Delta: a fast robot with parallel geometry. *Proc. 18th Int. Symposium on Industrial Robot*, 1988, pp. 91–100.
- [6] Gosselin C., Schreiber L.-T. Kinematically redundant spatial parallel mechanisms for singularity avoidance and large orientational workspace. *IEEE Trans. Robot.*, 2016, vol. 32, no. 2, pp. 286–300, doi: <https://doi.org/10.1109/TRO.2016.2516025>
- [7] Ларюшкин П.А., Эрастова К.Г., Филиппов Г.С. и др. К расчету механизмов типа Delta с линейными приводами и различным числом степеней свободы. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2019, № 3, с. 19–26, doi: <https://doi.org/10.1134/S0235711919030106>
- [8] Geonea I.D., Tarnita D., Pisla D. et al. Dynamic analysis of a spherical parallel robot used for brachial monoparesis rehabilitation. *Appl. Sci.*, 2021, vol. 11, no. 24, art. 11849, doi: <https://doi.org/10.3390/app112411849>
- [9] Valayil T.P., Tanev T.K. A 3UPS/S spherical parallel manipulator designed for robot-assisted hand rehabilitation after stroke. *Appl. Sci.*, 2024, vol. 14, no. 11, art. 4457, doi: <https://doi.org/10.3390/app14114457>
- [10] Palmieri G., Palpacelli M., Carbonari L. et al. Vision-based kinematic calibration of a small-scale spherical parallel kinematic machine. *Robot. Comput.-Integr. Manuf.*, 2018, vol. 49, pp. 162–169, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2017.06.008>
- [11] Li H., Luo J., Huang C. et al. Design and control of 3-DoF spherical parallel mechanism robot eyes inspired by the binocular vestibule-ocular reflex. *J. Intell. Robot. Syst.*, 2015, vol. 78, no. 3–4, pp. 425–441, doi: <https://doi.org/10.1007/s10846-014-0078-x>
- [12] Enferadi J., Shahi A. On the position analysis of a new spherical parallel robot with orientation applications. *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, 2016, vol. 37, no. 4, pp. 151–161, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2015.09.004>
- [13] Huang C., Gu J., Luo J. et al. Optimal design of a robotic eye based on spherical parallel mechanism by evolutionary strategy algorithm. *IEEE ICIA*, 2014, pp. 1008–1013, doi: <https://doi.org/10.1109/ICInfA.2014.6932797>

- [14] Ларюшкин П.А., Глазунов В.А., Хейло С.В. Решение задачи о положениях параллельного манипулятора с тремя степенями свободы. *Справочник. Инженерный журнал*, 2012, № 2, с. 16–20.
- [15] Gosselin C.M., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 1990, vol. 6, no. 3, pp. 281–290, doi: <https://doi.org/10.1109/70.56660>

## References

- [1] Glazunov V.A., Koliskor A.Sh., Kraynev A.F. *Prostranstvennyye mekhanizmy parallelnoy struktury* [Spatial mechanisms of parallel structure]. Moscow, Nauka Publ. 1991. 94 p. (In Russ.).
- [2] Merlet J.-P. Parallel robots. *Springer*, 2006. 402 p.
- [3] Glazunov V.A. *Mekhanizmy parallelnoy struktury i ikh primeneniye* [Parallel structure mechanisms and their applications]. Moscow-Izhevsk, IKI Publ., 2018. 1035 p. (In Russ.).
- [4] Stewart D. A platform with six degrees of freedom. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 1965, vol. 180-1, no. 15, pp. 371–386.
- [5] Clavel R. Delta: a fast robot with parallel geometry. *Proc. 18th Int. Symposium on Industrial Robot*, 1988, pp. 91–100.
- [6] Gosselin C., Schreiber L-T. Kinematically redundant spatial parallel mechanisms for singularity avoidance and large orientational workspace. *IEEE Trans. Robot.*, 2016, vol. 32, no. 2, pp. 286–300, doi: <https://doi.org/10.1109/TRO.2016.2516025>
- [7] Laryushkin P.A., Erastova K.G., Filippov G.S. et al. Calculation of delta-type mechanisms with linear actuators and different numbers of degrees of freedom. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2019, no. 3, pp. 19–26, doi: <https://doi.org/10.1134/S0235711919030106> (in Russ.). (Eng. version: *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2019, vol. 48, no. 3, pp. 204–210, doi: <https://doi.org/10.3103/S1052618819030105>)
- [8] Geonea I.D., Tarnita D., Pisla D. et al. Dynamic analysis of a spherical parallel robot used for brachial monoparesis rehabilitation. *Appl. Sci.*, 2021, vol. 11, no. 24, art. 11849, doi: <https://doi.org/10.3390/app112411849>
- [9] Valayil T.P., Taney T.K. A 3UPS/S spherical parallel manipulator designed for robot-assisted hand rehabilitation after stroke. *Appl. Sci.*, 2024, vol. 14, no. 11, art. 4457, doi: <https://doi.org/10.3390/app14114457>
- [10] Palmieri G., Palpacelli M., Carbonari L. et al. Vision-based kinematic calibration of a small-scale spherical parallel kinematic machine. *Robot. Comput.-Integr. Manuf.*, 2018, vol. 49, pp. 162–169, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2017.06.008>
- [11] Li H., Luo J., Huang C. et al. Design and control of 3-DoF spherical parallel mechanism robot eyes inspired by the binocular vestibule-ocular reflex. *J. Intell. Robot. Syst.*, 2015, vol. 78, no. 3–4, pp. 425–441, doi: <https://doi.org/10.1007/s10846-014-0078-x>
- [12] Enferadi J., Shahi A. On the position analysis of a new spherical parallel robot with orientation applications. *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, 2016, vol. 37, no. 4, pp. 151–161, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2015.09.004>
- [13] Huang C., Gu J., Luo J. et al. Optimal design of a robotic eye based on spherical parallel mechanism by evolutionary strategy algorithm. *IEEE ICIA*, 2014, pp. 1008–1013, doi: <https://doi.org/10.1109/ICInfA.2014.6932797>
- [14] Laryushkin P.A., Glazunov V.A., Kheylo S.V. Kinematics of 3-DOF parallel manipulator. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal* [Handbook. An Engineering Journal], 2012, no. 2, pp. 16–20. (In Russ.).
- [15] Gosselin C.M., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 1990, vol. 6, no. 3, pp. 281–290, doi: <https://doi.org/10.1109/70.56660>

Статья поступила в редакцию 19.03.2025

## Информация об авторах

**ХРЕСТИНА Арина Артуровна** — аспирантка лаборатории теории механизмов и структуры машин. ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский переулок, д. 4, e-mail: gaynetdinova.arina@gmail.com).

**ЛАРЮШКИН Павел Андреевич** — доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Основы конструирования машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: pav.and.lar@bmstu.ru).

**СИНИЦЫНА Юлия Владимировна** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Основы конструирования машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: js.werris@bmstu.ru).

**АНТОНОВ Антон Вадимович** — кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории теории механизмов и структуры машин. ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский переулок, д. 4, e-mail: antonov.av@imash.ru).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Хрестина А.А., Ларюшкин П.А., Синицына Ю.В., Антонов А.В. Решение обратной задачи о положениях сферического механизма параллельной структуры с линейными приводами. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 12, с. 12–19.

### Please cite this article in English as:

Khrestina A.A., Laryushkin P.A., Sinitsyna Yu.V., Antonov A.V. Inverse Kinematics of the Spherical Parallel Mechanism with Linear Actuators. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 12, pp. 12–19.

## Information about the authors

**KHRESTINA Arina Arturovna** — Postgraduate, Laboratory of Theory of Mechanisms and Machine Structure. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101001, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonievskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: gaynetdinova.arina@gmail.com).

**LARYUSHKIN Pavel Andreevich** — Doctor of Science (Eng.), Associate Professor, Professor of Department of Machine Design Principles. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: pav.and.lar@bmstu.ru).

**SINITSYNA Yulia Vladimirovna** — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Machine Design Principles. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: js.werris@bmstu.ru).

**ANTONOV Anton Vadimovich** — Candidate of Science (Eng.), Senior Researcher, Laboratory of Theory of Mechanisms and Machine Structure. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101001, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonievskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: antonov.av@imash.ru).