

УДК 629.7.023:539.3

# Исследование нелинейного деформирования и устойчивости эллиптической цилиндрической композитной оболочки при осевом сжатии

**Л.П. Железнов**

ФАУ «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина»

## Investigation of nonlinear deformation and stability of an elliptical cylindrical composite shell under axial compression

**L.P. Zheleznov**

Chaplygin Siberian Scientific Research Institute of Aviation

Решена задача устойчивости некруговой эллиптической цилиндрической оболочки, выполненной из композиционного материала, с учетом моментности и нелинейности ее докритического напряженно-деформированного состояния. Геометрически нелинейная задача устойчивости оболочки решена методами конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича. Критические нагрузки определены в процессе решения нелинейной задачи с помощью критерия Сильвестра. Используются ранее разработанные на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы композитных цилиндрических оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены их жесткие перемещения, что существенно влияет на сходимость решения. Исследована устойчивость консольно закрепленной эллиптической цилиндрической оболочки, выполненной из полимерного композиционного материала, при осевом сжатии. Определено влияние способа укладки монослоев, нелинейности деформирования и параметра овальности на критические нагрузки потери устойчивости оболочки и весовую эффективность композитной оболочки.

**EDN:** LZHRW, <https://elibrary/lzhrw>

**Ключевые слова:** эллиптическая цилиндрическая оболочка, полимерные композиционные материалы, нелинейное деформирование, устойчивость оболочки, метод конечных элементов, осевое сжатие, весовая эффективность

The problem of stability of non-circular elliptical cylindrical shells made of composite material is solved, taking into account the momentarity and nonlinearity of their subcritical stress-strain state. Geometrically, the nonlinear stability problem is solved by finite element methods and Newton-Kantorovich linearization. Critical loads are determined in the process of solving a nonlinear problem using the Sylvester criterion. The finite elements of composite cylindrical shells of natural curvature, developed by the author on the basis of Timoshenko's hypothesis, are used, and their rigid displacements are explicitly highlighted in the approximation of their displacements, which significantly affects the convergence of the solution. The stability of an elliptical, cantilever-mounted cylindrical shell made of polymer composite material under axial compression is investigated. The influence of monolayer laying methods, non-linearity of deformation, and the ovality parameter on the critical loads of shell stability loss and weight efficiency of composite shells has been clarified.

EDN: LZAHRW, <https://elibrary/lzahrw>

**Keywords:** elliptical cylindrical shells, polymer composite materials, nonlinear deformation, stability, finite element method, axial compression, weight efficiency

В конструкциях современных летательных аппаратов, особенно широкофюзеляжных самолетов большой вместимости, форма фюзеляжа часто имеет некруговое поперечное сечение. Однако некруговые оболочки, в отличие от круговых, недостаточно исследованы на устойчивость. Если количество публикаций по круговым оболочкам исчисляется тысячами, то по некруговым — несколькими десятками. Это можно объяснить меньшим использованием некруговых оболочек на практике, а также трудностями решения задач, связанными с непостоянством радиуса кривизны, что приводит к появлению переменных коэффициентов в уравнениях устойчивости.

Известные решения задач устойчивости оболочек получены аналитическими методами и, как правило, в линейном приближении, без учета их моментности и нелинейности докритического состояния, т. е. в классической постановке. Авторами работ [1–4] исследованы прочность и устойчивость таких оболочек в нелинейной постановке, однако они рассматривали, в основном, металлические оболочки.

На сегодняшний день в летательных аппаратах широко применяются полимерные композиционные материалы (ПКМ), которые обеспечивают существенное снижение массы конструкции при сохранении ее прочностных и жесткостных характеристик. Основополагающий вклад в разработку методов расчета композитных конструкций внесла школа В.В. Васильева [5, 6].

Несмотря на то, что исследованию прочности таких конструкций посвящено большое количество работ, до сих пор не решены вопросы их прочности и устойчивости в условиях нелинейного исходного состояния. Последнее особенно важно для фюзеляжей самолетов, где недопустима потеря устойчивости обшивки.

В большей части опубликованных работ задачи устойчивости оболочек из ПКМ решены в классической постановке при линейном исходном напряженно-деформированном состоянии (НДС) [7, 8]. Остаются нерешенными вопросы, связанные с прочностью и устойчивостью композитных конструкций при их нелинейном деформировании.

Для решения нелинейной задачи прочности и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек из ПКМ при произвольном нагружении применены методы конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича [9] с использованием шагового метода по нагрузке и энергетического критерия устойчивости. Критические нагрузки определены в процессе решения геометрически нелинейной задачи с помощью критерия Сильвестра. Используются разработанные на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы (КЭ) композитных цилиндрических оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены их жесткие перемещения.

Приведены результаты исследования влияния способа укладки монослоев по толщине оболочки, нелинейности деформирования и параметра овальности на устойчивость и весовую эффективность композитной эллиптической цилиндрической оболочки, нагруженной осевой силой сжатия. Результаты получены с помощью комплекса программ для расчета на прочность и устойчивость подкрепленных некруговых цилиндрических оболочек, зарегистрированного в Федеральной службе по интеллектуальной собственности [10].

Цель работы — исследование влияния физико-механических характеристик ПКМ на устойчивость эллиптической цилиндрической оболочки при осевом сжатии.

Основные соотношения для КЭ эллиптической цилиндрической оболочки из ПКМ и алгоритмы решения задачи ее прочности и устойчивости в условиях нелинейного исходного НДС опубликованы в работах [11–14]. Обшивка оболочки рассмотрена как ортотропная.

**Конечный элемент эллиптической оболочки.** Рассмотрим некруговую цилиндрическую оболочку, находящуюся под действием неоднородной краевой нагрузки в виде продольной силы  $N$ , поперечной силы  $Q$ , изгибающего  $M$  и крутящего  $M_{кр}$  моментов (рис. 1). Оболочку разбиваем по линиям главных кривизн на семейство четырехугольных КЭ естественной кривизны.

При перемещении КЭ как твердого тела компоненты деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  равны

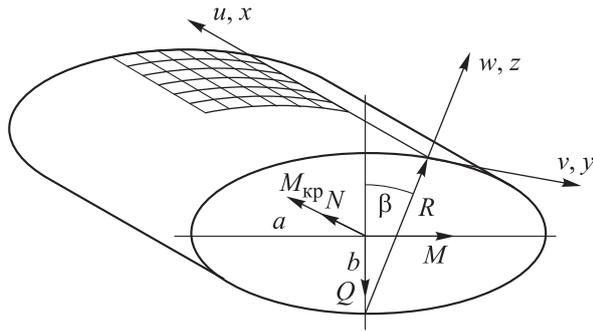


Рис. 1. Схема расчета некруговой цилиндрической оболочки

нулю. Приравнявая к нулю линейные компоненты деформаций, изменений кривизн и кручения [12], получаем систему дифференциальных уравнений (см. рис. 1)

$$\begin{cases} \epsilon_1 = u_x = 0; \\ \epsilon_2 = k_2(v_\beta + w) = 0; \\ \epsilon_3 = v_x + k_2u_\beta = 0; \\ \chi_1 = w_{xx} = 0; \\ \chi_2 = k_2[k_2(v - w_\beta)]_\beta = 0; \\ \chi_3 = [k_2(v - w_\beta)]_x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $u, v$  и  $w$  — тангенциальные перемещения и прогиб КЭ;  $k_2$  — кривизна поперечного сечения оболочки,  $k_2 = R^{-1}$  (радиус ее поперечного сечения);  $\beta$  — угол нормали к поперечному сечению оболочки с осью  $b$ ;  $x$  — продольная координата; индексы « $x$ » и « $\beta$ » означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Решение системы дифференциальных уравнений (1) имеет вид [12]

$$\begin{aligned} u &= C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2 + C_6; \\ v &= C_3c + C_4s - C_5(\Psi_1c + \Psi_2s) + (C_2c - C_1s)x; \\ w &= C_3s - C_4c - C_5(\Psi_1s - \Psi_2c) + (C_2s + C_1c)x, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $C_1 - C_6$  — произвольные постоянные,

$$c = \cos\beta; \quad s = \sin\beta; \quad \Psi_1 = \int Rsd\beta; \quad \Psi_2 = -\int Rcd\beta.$$

Функции (2) удовлетворяют уравнениям (1) и, следовательно, в линейном приближении являются перемещениями КЭ как твердых тел.

Как частный случай некруговой цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения, заданного уравнением

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

получаем

$$R = \frac{a^2b^2}{d^3}; \quad d^2 = a^2s^2 + b^2c^2;$$

$$\Psi_1 = -\frac{b^2c}{d}; \quad \Psi_2 = -\frac{a^2s}{d},$$

где  $a$  и  $b$  — большая и малая ось эллипса.

Разобьем оболочку линиями главных кривизн по образующей на  $m$  частей, а по направлению на  $n$ . Таким образом, оболочку представим набором  $m \times n$  криволинейных прямоугольных КЭ естественной кривизны.

Применяя для композитной оболочки гипотезу Тимошенко прямой линии, запишем выражения для углов поворотов ее сечений [14]

$$\begin{aligned} \vartheta_x &= \vartheta_1 + \Psi_x; \quad \vartheta_y = \vartheta_2 + \Psi_y; \\ \vartheta_1 &= -w_x; \quad \vartheta_2 = k_2(v - w_\beta). \end{aligned} \quad (3)$$

Из соотношений (3) получаем углы сдвига сечений

$$\Psi_x = \vartheta_x - \vartheta_1; \quad \Psi_y = \vartheta_y - \vartheta_2.$$

Используя билинейную аппроксимацию для тангенциальных перемещений  $u, v$  и углов сдвига  $\Psi_x, \Psi_y$ , бикубическую аппроксимацию для прогиба и выражения для перемещений КЭ оболочки как жесткого целого [12], получаем следующие соотношения для полных перемещений точек КЭ:

$$\begin{aligned} u &= a_1xy + a_2x + a_3y + a_4 + a_6\Psi_1s + a_{20}\Psi_2c; \\ v &= a_5xy + a_6xc + a_7y + a_8(\Psi_1c + \Psi_2s) - \\ &- a_{20}xs + a_{23}c - a_{24}s; \\ w &= a_9x^3y^3 + a_{10}x^3y^2 + a_{11}x^3y + a_{12}x^3 + a_{13}x^2y^3 + \\ &+ a_{14}x^2y^2 + a_{15}x^2y + a_{16}x^2 + a_{17}xy^3 + a_{18}xy^2 + \\ &+ a_{19}xy + a_{20}xc + a_{21}y^3 + a_{22}y^2 + a_{23}s + \\ &+ a_{24}c + a_6xs + a_8(\Psi_1s - \Psi_2c); \\ \Psi_x &= a_{25}xy + a_{26}x + a_{27}y + a_{28}; \\ \Psi_y &= a_{29}xy + a_{30}x + a_{31}y + a_{32}, \end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты полиномов  $a_i$  выражаются через узловые неизвестные

$$\mathbf{u} = \{u_i, v_i, w_i, \vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}, w_{xyi}, \Psi_{xi}, \Psi_{yi}, u_j, \dots, u_k, \dots, u_n, \dots, w_{xyn}, \Psi_{xn}, \Psi_{yn}\}^T.$$

В каждом узле восемь неизвестных, следовательно, КЭ имеет 32 степени свободы.

**Результаты исследования.** Рассмотрим консольно закрепленную ( $u = v = w = w_x = w_\varphi = w_{x\varphi} = 0$ ) некруговую цилиндрическую оболочку эллиптического поперечного сечения,

выполненную из ПКМ и находящуюся под действием осевой силы сжатия  $N$ , приложенной к ее свободному краю (см. рис. 1). Нагруженный край оболочки подкреплен жестким в своей плоскости шпангоутом (с жесткостью на растяжение  $EF = 1,96 \cdot 10^7$  Н и изгибной жесткостью  $EI = 1,475 \cdot 10^{10}$  Н·мм<sup>2</sup>).

Рассмотрим оболочку с эквипериметрическим радиусом  $R_0$  (радиусом круговой оболочки с периметром, равным периметру некруговой оболочки). При заданном отношении полуосей эллипса (параметре овальности)  $\bar{a} = a/b$  эквипериметрический радиус

$$R_0 = \frac{P}{2\pi} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \{1 - (1 - \bar{b}^2) \sin^2 \psi\}^{1/2} d\psi =$$

$$= \frac{2a}{\pi} E(\pi/2, \bar{b}) \approx \frac{a}{2} \left[ \frac{3}{2}(1 + \bar{b}) - \sqrt{\bar{b}} \right];$$

$$\bar{b} = b/a,$$

где  $P$  — периметр поперечного сечения оболочки;  $E(\pi/2, \bar{b})$  — полный эллиптический интеграл второго рода;

$$a = R_0 \frac{2}{\pi} \left[ E\left(\frac{\pi}{2}, \bar{b}\right) \right]^{-1}; \quad b = a\bar{b}.$$

При исследовании удобно задавать параметры  $R_0$  и  $\bar{a}$ , так как это позволяет легко сравнивать устойчивость эквипериметрических эллиптических и круговых оболочек.

Действие осевой силы заменяем статически эквивалентными ей нормальными усилиями сжатия  $T_1 = N/2\pi R_0$ .

Длина оболочки  $L = 2000$  мм, толщина  $h = 3,456$  мм, эквипериметрический радиус  $R_0 = 2000$  мм. В качестве материала оболочки выбран 18-слойный ПКМ Тогауса Т700 со следующими механическими характеристиками [14]: модули упругости в продольном направлении монослоя на растяжение  $E_1^+ = 125\,510$  МПа и сжатие  $E_1^- = 114\,380$  МПа; модули упругости в поперечном направлении мо-

нослоя на растяжение  $E_2^+ = 8780$  МПа и сжатие  $E_2^- = 8670$  МПа; модуль сдвига  $G_{12} = 4740$  МПа; коэффициент Пуассона монослоя  $\mu_{12} = 0,34$ ; толщина монослоя  $\delta = 0,192$  мм.

Указанные жесткостные характеристики материала оболочки приведены в работе [15].

В силу симметрии нагрузки рассмотрена 1/2 часть оболочки, получаемая продольным разрезом в вертикальной плоскости. Для расчета по линии разреза заданы условия симметрии  $v = 0$  и  $\vartheta_2 = 0$ . Оболочку разбивали конечно-элементной сеткой  $m \times n = 15 \times 90$ , что обеспечивало сходимость решения по числу КЭ с погрешностью, не превышающей 5 %.

Введен параметр критической осевой силы сжатия

$$k_c = N^*/N_0.$$

Здесь  $N^*$  — критическое значение осевой силы;  $N_0$  — верхнее критическое значение краевой осевой силы для круговой цилиндрической изотропной металлической оболочки [16],

$$N_0 = 2\pi E h^2 / \sqrt{3(1 - \nu^2)},$$

где  $E$ ,  $h$  и  $\nu$  — модуль упругости, толщина и коэффициент Пуассона оболочки.

Рассмотрены пять вариантов укладки композитных монослоев по толщине оболочки, приведенных в табл. 1, и (для сравнения) оболочка из алюминиевого сплава Д16Т (далее вариант б).

Зависимости параметра критической осевой силы сжатия  $k_c$  от параметра овальности  $\bar{a}$  металлической и композитных оболочек эллиптического поперечного сечения и овального, составленного из двух пар дуг окружностей, при линейном и нелинейном исходных НДС приведены на рис. 2, а и б. Эквипериметрический радиус обеих композитных оболочек был одинаковым. Кривые 1–5 соответствуют вариантам, указанным в табл. 1, кривая б — алюминиевому сплаву Д16Т.

Таблица 1

Варианты укладки монослоев

Вариант	Укладка
1	0, 0, ±45, 90, 0, ±45, 90, 90, ±45, 0, 90, ±45, 0, 0
2	±45, ±45, ±45, ±45, ±45, ±45, ±45, ±45, ±45
3	±45, ±45, ±45, 0, 90, 0, 0, 90, 0, -45, 45, -45, 45, -45, 45
4	0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90
5	0, 0, 0, 90, 0, ±45, ±45, ±45, ±45, 0, 90, 0, 0, 0

Для сравнения параметров критической осевой силы сжатия эллиптической и овальной композитных оболочек при линейном исходном НДС введен параметр

$$\Delta = \frac{(k_c^{эл} - k_c^{ов})}{k_c^{эл}} \cdot 100 \%, \%$$

где  $k_c^{эл}$  и  $k_c^{ов}$  — параметр критической осевой силы сжатия эллиптической и овальной оболочки.

Результаты сравнения параметров критической осевой силы сжатия эллиптической и овальной оболочек в линейном исходном НДС при различных вариантах укладки монослоев и параметре овальности приведены в табл. 2.

Как видно из рис. 2, параметр критической осевой силы сжатия  $k_c$  существенно зависит как от параметра овальности, так и от варианта

укладки монослоев. Качественно зависимости параметра критической осевой силы сжатия  $k_c$  от параметра овальности  $\bar{a}$  эллиптической и овальной композитных оболочек совпадают независимо от варианта укладки монослоев. Тем не менее, у эллиптической оболочки параметр критической осевой силы сжатия меньше (в пределах 8 %), чем у овальной (см. табл. 2). С ростом параметра овальности  $\bar{a}$  это расхождение увеличивается. Наиболее эффективной укладкой является вариант 1, наименее — 2 и 4. У металлической оболочки параметр критической осевой силы сжатия больше, чем у композитных.

Для исследования влияния нелинейности исходного НДС оболочки на параметр критической осевой силы сжатия введен параметр нелинейности

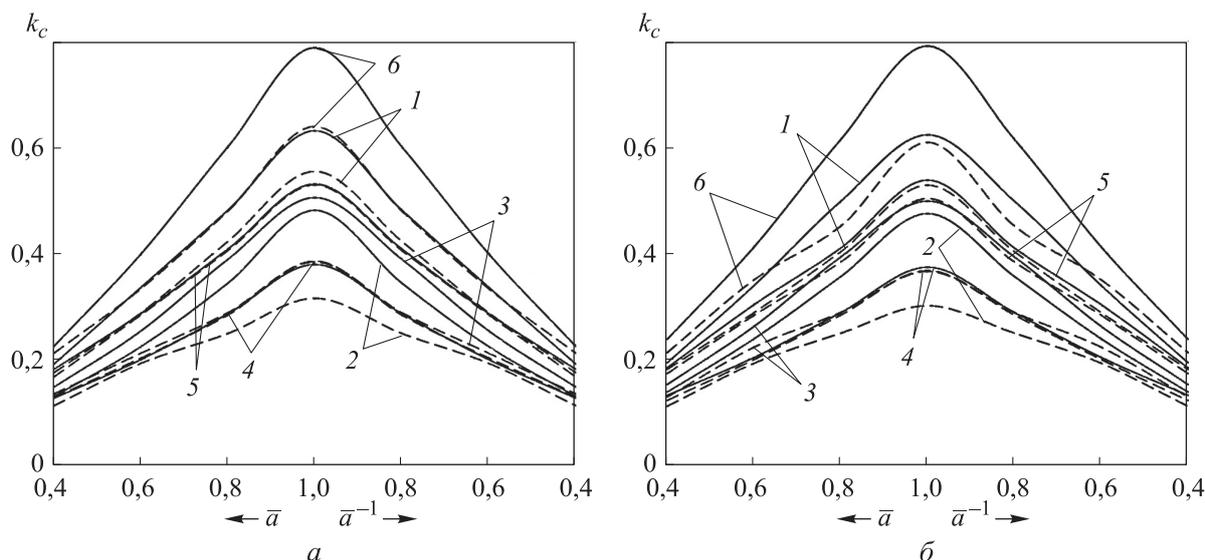


Рис. 2. Зависимости параметра критической осевой силы сжатия  $k_c$  от параметра овальности  $\bar{a}$  металлической и композитных оболочек эллиптического (а) и овального (б) поперечного сечения при линейном (—) и нелинейном (- -) исходных НДС

Таблица 2

**Результаты сравнения параметров критической силы сжатия эллиптической и овальной оболочек в линейном исходном НДС**

Вариант укладки	Параметр $\Delta$ , %, при параметре овальности оболочки $\bar{a}$						
	0,40	0,60	0,80	1,00	1,25	1,67	2,50
1	-4,0	0,0	-2,5	0,0	-2,5	0,0	-4,0
2	-7,7	-7,7	-5,1	0,0	-5,1	-7,7	-7,7
3	-2,6	-5,0	0,0	0,0	0,0	-5,0	-2,6
4	-2,5	-4,0	-2,5	0,0	-2,5	-4,0	-2,5
5	-4,0	-2,5	-1,6	0,0	-1,6	-2,5	-4,0
6	-5,0	-2,5	-1,0	0,0	-1,0	-2,5	-5,0

Таблица 3

**Результаты исследования влияния нелинейности оболочки  
на параметр критической осевой силы сжатия**

Вариант укладки	Параметр нелинейности $\Delta_n$ , %, при параметре овальности оболочки $\bar{a}$						
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,25	1,67	2,5
1	-8,4	<b>-16,5</b>	-13,8	-13,8	-13,8	<b>-16,5</b>	-8,4
2	<b>-16,6</b>	<b>-16,5</b>	<b>-38,2</b>	<b>-52,5</b>	<b>-38,2</b>	<b>-16,5</b>	<b>-16,6</b>
3	-8,6	<b>-19,6</b>	<b>-35,1</b>	<b>-31,9</b>	<b>-35,1</b>	<b>-19,6</b>	-8,6
4	1,6	1,6	-0,9	1,6	-0,9	1,6	1,6
5	-8,4	-0,9	-0,9	-0,6	-0,9	-0,9	-8,4
6	-5,7	<b>-19,6</b>	<b>-25,4</b>	<b>-23,4</b>	<b>-25,4</b>	<b>-19,6</b>	-5,7

$$\Delta_n = (k_{cn} - k_{cl}) / k_{cl} \cdot 100 \%,$$

где  $k_{cn}$  и  $k_{cl}$  — параметр критической осевой силы сжатия для нелинейного и линейного исходного НДС оболочки.

Результаты исследования влияния нелинейности оболочки на параметр критической осевой силы сжатия при различных вариантах укладки монослоев и параметре овальности приведены в табл. 3. Жирным шрифтом выделены варианты расчета оболочек с наибольшим (более 15 %) влиянием нелинейности на параметр  $k_c$ .

Из табл. 3 следует, что влияние нелинейности исходного НДС на  $k_c$  зависит как от параметра овальности, так и от варианта укладки монослоев. Нелинейность снижает параметр критической осевой силы  $k_c$  для всех вариантов

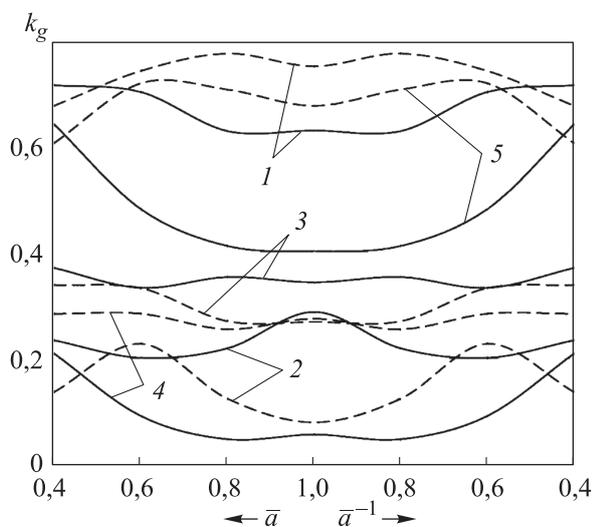


Рис. 3. Зависимости весовой эффективности  $k_g$  от параметра овальности  $\bar{a}$  композитной оболочки в линейном (—) и нелинейном (---) исходных НДС при различных вариантах укладки монослоев

оболочек. Наибольшее влияние нелинейности на параметр критической осевой силы наблюдается у вариантов укладки 1–3 (до 50 %), незначительное (в пределах 2 %) — у вариантов 4 и 5. С ростом параметра овальности  $\bar{a}$  это влияние снижается.

Весовая эффективность композитной оболочки определяется выражением

$$k_g = \frac{k_{ck}}{k_{cm} G_k / G_m},$$

где  $k_{ck}$ ,  $k_{cm}$  и  $G_k$ ,  $G_m$  — параметры критической осевой силы сжатия и массы композитной и металлической оболочки соответственно.

Зависимости весовой эффективности  $k_g$  от параметра овальности  $\bar{a}$  композитной оболочки в линейном и нелинейном исходных НДС при различных вариантах укладки монослоев приведены на рис. 3. Номера кривых соответствуют вариантам, указанным в табл. 1.

Видно, что параметр весовой эффективности композитной оболочки существенно зависит как от параметра овальности  $\bar{a}$ , так и от варианта укладки монослоев. Весовая эффективность композитных оболочек достигает 50 % (вариант 1). С увеличением овальности оболочки весовая эффективность повышается. Нелинейность в большинстве случаев увеличивает весовую эффективность композитной оболочки. У вариантов укладки 2 и 4 весовая эффективность композитной оболочки меньше, чем у металлической.

## Выводы

1. Показано, что параметр критической осевой силы сжатия композитной оболочки существенно зависит как от параметра овальности,

так и от варианта укладки монослоев. Качественно зависимости параметра критической осевой силы сжатия от параметра овальности эллиптической и овальной оболочек совпадают независимо от укладки монослоев. Однако у эллиптической оболочки этот параметр меньше, чем у овальной в пределах 8 % в зависимости от варианта укладки монослоев и параметра овальности оболочек. С ростом параметра овальности такое расхождение увеличивается. Наиболее эффективной укладкой является вариант 1, наименее — 2 и 4.

2. Установлено, что во всех рассмотренных вариантах укладки монослоев нелинейность

оболочки снижает параметр критической осевой силы сжатия. Наибольшее влияние нелинейности на этот параметр наблюдалось у вариантов укладки 1–3 (до 50 %), незначительное (в пределах 2 %) — у вариантов 4 и 5. С ростом параметра овальности это влияние снижается.

3. Весовая эффективность композитной оболочки зависит как от укладки монослоев, так и от параметра ее овальности. Наиболее эффективной укладкой оказались варианты 1 и 5.

4. Нелинейность композитной оболочки в большинстве случаев повышает ее весовую эффективность.

## Литература

- [1] Hutchinson J.W. Buckling and initial postbuckling behaviour of oval cylindrical shells under axial compression. *Trans. ASME, Journal of applied mechanics*, 1968, no. 3, pp. 66–72.
- [2] Tennyson R.C., Booton M., Caswell R.D. Buckling of imperfect elliptical cylindrical shells under axial compression. *AIAA J.*, 1971, vol. 9, no. 2, pp. 250–255, doi: <https://doi.org/10.2514/3.6159>
- [3] Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при чистом изгибе. *Известия АН. МТТ*, 2004, № 3, с. 144–151.
- [4] Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Нелинейное деформирование и устойчивость овальных цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении. *ПМТФ*, 2008, т. 49, № 1, с. 134–138.
- [5] Васильев В.В. *Механика конструкций из композитных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988. 271 с.
- [6] Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced mechanics of composite materials and structures*. Elsevier, 2018. 882 p.
- [7] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984. 264 с.
- [8] Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И. и др. *Статика и динамика оболочечных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1975. 375 с.
- [9] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*. Москва, Физматгиз, 1959. 684 с.
- [10] Железнов Л.П. *Комплекс программ для расчета на прочность и устойчивость подкрепленных некруговых цилиндрических оболочек*. Свид. о гос. рег. прог. ЭВМ № 2013615613 РФ. Заявл. 17.06.2013.
- [11] Кабанов В.В., Железнов Л.П. К расчету цилиндрической оболочки методом конечных элементов. *Прикладная механика*, 1985, т. 21, № 9, с. 35–38.
- [12] Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении. *Прикладная механика и техническая физика*, 2002, т. 43, № 4, с. 161–169.
- [13] Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно-подкрепленных эллиптических цилиндрических композитных оболочек при кручении и внутреннем давлении. *Авиационная техника*, 2018, № 2, с. 27–34.
- [14] Железнов Л.П., Серьезнов А.Н. Нелинейное деформирование и устойчивость композитного отсека фюзеляжа самолета при чистом изгибе. *Авиационная техника*, 2021, № 3, с. 22–30.
- [15] Железнов Л.П. Нелинейное деформирование и устойчивость анизотропных круговых цилиндрических оболочек при чистом изгибе. *Полет*, 2023, № 1–2, с. 3–15.

- [16] Кабанов В.В. *Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек*. Москва, Машиностроение, 1982. 253 с.

## References

- [1] Hutchinson J.W. Buckling and initial postbuckling behaviour of oval cylindrical shells under axial compression. *Trans. ASME, Journal of applied mechanics*, 1968, no. 3, pp. 66–72.
- [2] Tennyson R.C., Booton M., Caswell R.D. Buckling of imperfect elliptical cylindrical shells under axial compression. *AIAA J.*, 1971, vol. 9, no. 2, pp. 250–255, doi: <https://doi.org/10.2514/3.6159>
- [3] Zhelezov L.P., Kabanov V.V. Investigation of nonlinear deformation and stability of non-circular cylindrical shells under pure bending. *Izvestiya AN. MTT*, 2004, no. 3, pp. 144–151. (In Russ.).
- [4] Boyko D.V., Zhelezov L.P., Kabanov V.V. Nonlinear deformation and stability of oval cylindrical shells under combined loading. *PMTF*, 2008, vol. 49, no. 1, pp. 134–138. (In Russ.). (Eng. version: *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 1, pp. 109–113, doi: <https://doi.org/10.1007/s10808-008-0016-4>)
- [5] Vasilyev V.V. *Mekhanika konstruksiy iz kompozitnykh materialov* [Mechanics of composite designs]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988. 271 p. (In Russ.).
- [6] Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced mechanics of composite materials and structures*. Elsevier, 2018. 882 p.
- [7] Alfutov N.A., Zinovyev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogosloynnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of multilayer plates and shells from composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984. 264 p. (In Russ.).
- [8] Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I. et al. *Statika i dinamika obolocheknykh konstruksiy* [Statics and dynamics of shell structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 375 p. (In Russ.).
- [9] Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyy analiz v normirovannykh prostranstvakh* [Functional analysis in normalized spaces]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 684 p. (In Russ.).
- [10] Zhelezov L.P. *Kompleks programm dlya rascheta na prochnost i ustoychivost podkreplennykh nekrugovykh tsilindricheskikh obolochek* [Complex of programs for calculation of strength and stability of the reinforced non-circular cylindrical shells]. Software reg. certificate no. 2013615613 RF. Appl. 17.06.2013. (In Russ.).
- [11] Kabanov V.V., Zhelezov L.P. To the calculation of a cylindrical shell by the finite element method. *Prikladnaya mekhanika*, 1985, vol. 21, no. 9, pp. 35–38. (In Russ.).
- [12] Zhelezov L.P., Kabanov V.V. Nonlinear deformation and stability of noncircular cylindrical shells under internal pressure and axial compression. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 161–169. (In Russ.). (Eng. version: *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 617–621.)
- [13] Boyko D.V., Zhelezov L.P., Kabanov V.V. Nonlinear deformation and stability of discrete-reinforced elliptical cylindrical composite shells under torsion and internal pressure. *Aviatsionnaya tekhnika*, 2018, no. 2, pp. 27–34. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. Aeronaut.*, 2018, vol. 61, no. 2, pp. 175–182, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068799818020046>)
- [14] Zhelezov L.P., Seryeznov A.N. Nonlinear deformation and stability of the aircraft fuselage composite section under pure bending. *Aviatsionnaya tekhnika*, 2021, no. 3, pp. 22–30. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. Aeronaut.*, 2021, vol. 64, no. 3, pp. 385–393, doi: <https://doi.org/10.3103/S106879982103003X>)
- [15] Zhelezov L.P. Nonlinear deformation and stability of anisogrid circular cylindrical shells under pure bending. *Polet [Flight]*, 2023, no. 1–2, pp. 3–15. (In Russ.).
- [16] Kabanov V.V. *Ustoychivost neodnorodnykh tsilindricheskikh obolochek* [Stability of inhomogeneous cylindrical shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982. 253 p. (In Russ.).

## Информация об авторе

**ЖЕЛЕЗНОВ Лев Петрович** — доктор технических наук, старший научный сотрудник, заместитель начальника отделения усталостной и статической прочности, начальник аспирантуры. ФАУ «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина» (630051, Новосибирск, Российская Федерация, ул. Ползунова, д. 21, e-mail: Zgeleznov@sibnia.ru).

## Information about the author

**ZHELEZNOV Lev Petrovich** — Doctor of Science (Eng.), Senior Researcher, Deputy Head of the Department of Fatigue and Static Strength, Head of the Postgraduate Department. Chaplygin Siberian Scientific Research Institute of Aviation (630051, Novosibirsk, Russian Federation, Polzunova St., Bldg. 21, e-mail: Zgeleznov@sibnia.ru).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Железнов Л.П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости эллиптической цилиндрической композитной оболочки при осевом сжатии. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2026, № 1, с. 111–119.

### Please cite this article in English as:

Zheleznov L.P. Investigation of nonlinear deformation and stability of an elliptical cylindrical composite shell under axial compression. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2026, no. 1, pp. 111–119.



## Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана предлагает читателям монографию

### «Аспекты математического моделирования объемного гидропривода с машинным управлением»

Автор Г.В. Птицын

В монографии рассмотрены аспекты математического моделирования объемного гидропривода с машинным управлением, относящегося к силовым приводным системам, сложным для моделирования и модельных исследований, что обусловлено взаимосвязанными и взаимовлияющими особенностями их схемных решений и конструкций, рабочих режимов и условий эксплуатации в различных изделиях разного назначения.

Книга предназначена для машиностроителей — ученых и инженеров, участвующих в научно-исследовательских и опытно-конструкторских работах по созданию, модернизации и модификации силовых гидроприводных систем и их элементов; будет интересна и полезна докторантам и аспирантам научных специальностей: 2.5.2 «Машиноведение»; 2.5.10 «Гидравлические машины, вакуумная, компрессорная техника, гидро- и пневмосистемы»; 2.5.11 «Наземные транспортно-технологические средства и комплексы»; 2.3.7 «Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования», а также может быть применена в образовательном процессе по вузовским программам инженерных специальностей 15.04.02.01 «Гидравлические машины и гидропневмоагрегаты» и 15.04.02.02 «Системы гидравлических и пневматических приводов».

### По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; <https://press.bmstu.ru>