

Машиностроение и машиноведение

УДК 621.83

Трехзвенный центроидный механизм как несвободная система формообразующих точек

Г.Ю. Волков¹, Ю.В. Алексеева²

¹ ФГБОУ ВО «Курганский государственный университет»

² ГБПОУ «Курганский промышленный техникум»

Three-link centroid mechanism as a non-free system of forming points

G.Yu. Volkov¹, Yu.V. Alekseeva²

¹ Kurgan State University

² Kurgan Industrial Technical School

Проектирование центроидных механизмов — сложная и малоизученная задача, подходы к решению которой нуждаются в осмыслении и упорядочении. В качестве методологической базы для решения этой задачи предложено использовать принцип отображения механизма в виде несвободной системы формообразующих точек. Такой подход позволяет решать вопросы структуры и кинематики механических систем более компактно, чем это возможно в рамках классической теории машин и механизмов. В свою очередь, центроидные механизмы представляют собой хорошую платформу для тестирования и развития приемов точечного моделирования механических систем. В результате выполненного исследования выявлены и проанализированы достоинства и недостатки различных методов геометрического проектирования трехзвенных центроидных механизмов. В частности, выбрана приоритетная методика синтеза планетарного механизма с некруглыми зубчатыми колесами и плавающими сателлитами, предназначенного для использования в роторных гидравлических и пневматических машинах.

EDN: GADUCC, <https://elibrary/gaducc>

Ключевые слова: аналитическая механика, центроидные механизмы, некруглые зубчатые колеса, теорема Аронгольда — Кеннеди, планетарная гидромашин

Designing centroid mechanisms is a complex and insufficiently explored problem, the approaches to solving which need to be understood and streamlined. As a methodological basis for solving this problem, it is proposed to use the principle of displaying a mechanism as a non-free system of form-generating points. This approach allows us to illuminate and solve issues of the structure and kinematics of mechanical systems more compactly than is possible within the frame of the classical theory of machines and mechanisms. In turn, centroid mechanisms represent a good platform for testing and developing methods of "point" modeling of mechanical systems. As a result of the study, a certain clarity was achieved regarding the advantages and disadvantages of various methods of geometric design of three-

link centroid mechanisms. In particular, a priority method was chosen for the synthesis of a planetary mechanism with non-circular gears and floating satellites, intended for use in rotary hydraulic and pneumatic machines.

EDN: GADUCC, <https://elibrary/gaducc>

Keywords: analytical mechanics, centroid mechanisms, non-circular gears, Aronhold-Kennedy theorem, planetary hydraulic machine

Конструкции механизмов и машин зависят от технологии изготовления их деталей. Благодаря развитию технологий появляется возможность реализации новых технических устройств, к которым относятся и плоские механизмы с некруглыми зубчатыми колесами [1–3]. Их проектирование требует совершенствования и упорядочения представлений о структуре и методах геометрического расчета механических систем с центроидными кинематическими парами.

Центроидная пара — это две кривые, перекатывающиеся друг по другу без скольжения. Пара, в которой тангенциальная составляющая силы передается за счет фрикционного взаимодействия тел, имеет недостатки. На практике чаще используют зубчатые зацепления, т. е. зазубренные (озубренные) [4] центроиды. В них центроиды выступают лишь как теоретические, воображаемые линии, а работают профили зубьев.

Фрикционная и зубчато-центроидная кинематические пары имеют различия. Зубчатое зацепление не только обеспечивает большую нагрузочную способность механизма, чем фрикционная пара, но и способно компенсировать некоторое несовпадение расчетных и фактических центроид. Геометрические показатели качества зацепления, заменяющего центроидную пару, тем лучше, чем ближе фактическая центроидная пара к теоретической расчетной кривой, для которой выполнено озубрение. Поэтому, проектируя зубчато-центроидные механизмы, первоначально целесообразно рассматривать их чисто центроидные модели.

Представляющие наибольший практический интерес зубчатые центроидные механизмы являются трехзвенными. Все трехзвенные механизмы, содержащие только центроидные (С) и вращательные (В) кинематические пары, можно свести к двум группам: ВВС и ВСС.

Анализ технической литературы показывает, что общеизвестные методики геометрического расчета центроидных механизмов распространяются только на схемы группы ВВС с круглы-

ми центроидами. В рамках традиционных представлений теории механизмов и машин, согласно которым базисными элементами механизмов являются звенья и кинематические пары, найти корректный подход к решению задач синтеза всех трехзвенных центроидных механизмов затруднительно. Для этого целесообразно воспользоваться представлениями аналитической механики [5].

Цель статьи — разработать корректный методологический подход к геометрическому проектированию трехзвенных центроидных механизмов с зубчатыми зацеплениями.

Виды связей между обобщенными координатами, характеризующими относительное положение формообразующих точек плоских механизмов. В аналитической механике, в отличие от классической теории механизмов, базисными элементами служат не звенья, а материальные точки. Применительно к задачам геометрического описания механизмов следует рассматривать некоторые формообразующие точки. Для описания относительного положения этих точек будем использовать две обобщенные координаты q : l_{AB} — расстояние между точками A и B ; φ_{CD}^{AB} — угол между прямыми AB и CD , проходящими через эти точки (рис. 1).

Связи в таких системах — это ограничения, накладываемые на обобщенные координаты точек. В аналитической механике эти ограни-

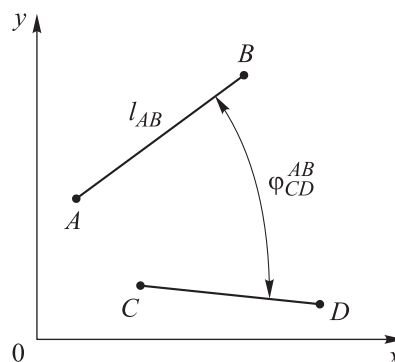


Рис. 1. Схема расположения формообразующих точек механической системы

чения отображаются уравнениями или неравенствами связи. Число степеней свободы относительного движения формообразующих точек плоской системы

$$W = 2M - 3 - S, \quad (1)$$

где M — число точек; S — число условий (уравнений) стационарных связей.

Нестационарные (зависящие от времени t) связи — это параметры, управляющие механизмом. Их число соответствует числу степеней свободы механизма.

Заметим, что ранее точечная интерпретация строения механизмов уже использовалась в работах, например [6]. Но в них рассматривались преимущественно стержневые конструкции или рычажные механизмы, т. е. системы с низшими кинематическими парами. Возможность применения такого подхода к механизмам с высшими парами обсуждалась в публикациях [7, 8].

В рассматриваемых плоских центроидных механизмах могут присутствовать следующие стационарные связи.

Жесткие связи характеризуются постоянством обобщенной координаты: $l_{AB} = \text{const}$ или $\varphi_{CD}^{AB} = \text{const}$.

Межпараметрические связи описываются зависимостью между несколькими обобщенными координатами. В частности, бинарная связь $F(q_m, q_n) = 0$, когда две обобщенные координаты входят в одно уравнение. Физический смысл связей, соответствующих конкретным уравнениям, может быть разным, что прежде всего зависит от того, какая решается задача: анализа или синтеза. Так, в задаче анализа бинарная связь $F(q_m, q_n) = 0$ — это кривая, профиль некоторого звена, а в задаче синтеза — она обычно характеризует требуемый закон движения ведомого звена.

Особые (сингулярные) связи описываются системой уравнений, которые содержат частные производные нескольких обобщенных координат. Физический смысл таких связей тоже бывает разным. При проектировании центроидных систем важны два условия — зацепления $n(K)$ и отсутствия скольжения $\tau(K)$.

Условие зацепления $n(K)$ — нормальная связь — означает, что в точке K профили не пересекаются, а касаются друг друга. Как будет выглядеть это условие в развернутом виде, зависит от применяемого математического аппарата. В теории зубчатых зацеплений подобную

связь обычно [9] называют уравнением зацепления и выражают в виде скалярного произведения: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, где \mathbf{n} — вектор нормали к одной из взаимодействующих поверхностей; \mathbf{v} — вектор относительной скорости взаимодействующих поверхностей в точке контакта. Другой признак выполнения условия зацепления — коллинеарность нормалей к профилям двух звеньев, соприкасающихся в точке K . В конкретных задачах условие $n(K)$ может сводиться к одному конечному уравнению и даже к жесткой связи.

Условие отсутствия скольжения $\tau(K)$ — тангенциальная связь — означает, что точка K , принадлежащая и первому звену, и второму, имеют общую скорость движения: $v_{K1} = v_{K2}$. В интегральной форме соответствующее выражение означает одинаковую длину дуг кривых — профилей первого и второго звеньев, по которым точка контакта K переместилась за определенное время.

Если предметом проектирования являются зубчатые центроидные системы, то к особым связям следует добавить связь $o(K)$, характеризующую взаимное огибание поверхностей. Этот вид связи существует физически параллельно с цепочкой связей, которые касаются формообразующих точек и присутствуют в виде уравнений. Здесь точка K контакта центроид фигурирует как некоторый абстрактный символ. На расчет числа степеней свободы относительного движения формообразующих точек наличие связи $o(K)$ не влияет.

Шарнирный треугольник ВВВ. Трехзвенные центроидные механические системы имеют структурные особенности, которые проявляются уже в простейшей системе ВВВ — шарнирном треугольнике (рис. 2). Рассмотрим систему трех формообразующих точек A , B и C с жесткими связями $l_{AB} = \text{const}$, $l_{BC} = \text{const}$ и $l_{AC} = \text{const}$. Очевидно, что в общем случае (рис. 2, а) точки A , B и C , лежащие в вершинах треугольника, неподвижны относительно друг друга. Такой вывод дает и расчет по формуле (1): $W = 2 \cdot 3 - 3 - 3 = 0$.

В особой конфигурации линейного вырождения (когда все точки лежат на одной прямой) система ВВВ (рис. 2, б) приобретает мгновенную подвижность, а стороны треугольника ABC можно рассматривать как звенья некоторого механизма. Такое параметрическое соотношение соответствует теореме Аронгольда — Кеннеди [10] о трех центрах вращения: мгновенный центр P_{12} относитель-

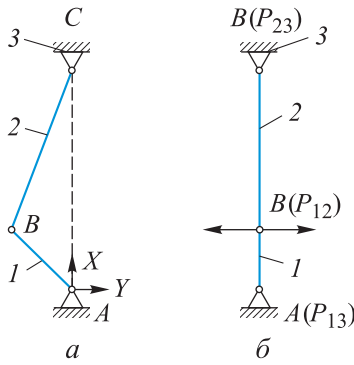


Рис. 2. Расчетные схемы системы ВВВ

ного вращения тел 1 и 2 лежит на линии, соединяющей точки P_{13} и P_{23} , которые являются мгновенными центрами вращения тел 1 и 2 относительно тела 3.

Условие, вытекающее из теоремы Аронгольда — Кеннеди, можно рассматривать в качестве специфической жесткой связи $\alpha_{AC}^{AB} = 0$. После ее добавления система, уже содержащая три жесткие связи, приобретая подвижность, становится статически неопределимой.

Ту же самую особую конфигурацию линейного вырождения шарнирного трехзвенника можно получить, задав связь $l_{AC} = l_{BC} + l_{AB}$. При остановленном звене 3 длиной l_{AC} отношение мгновенных угловых скоростей звеньев 1 и 2 ω_1/ω_2 обратно пропорционально отношению длин l_{BC}/l_{AB} . Применительно к зубчатым передачам параметрическое соотношение

$$\omega_1/\omega_2 = l_{BC}/l_{AB} \quad (2)$$

следует из основной теоремы плоских зацеплений (теоремы Виллиса) [11].

В шарнирной системе ВВВ нет высших центроидных пар. В трехзвенных системах, содержащих такие пары (ВВС, ВСС), становится важным то, как получается информация о форме центроид. Если центроиды звеньев известны заранее, то решается задача анализа параметров движения этих звеньев, если центроиды формируются в процессе проектирования механизма — задача синтеза.

Формула строения центроидного механизма системы ВВС в задаче анализа. Расчетная схема механизма, содержащего одну центроидную пару, показана на рис. 3, а. Эта система сложнее предыдущей, поэтому при ее описании целесообразно следовать принципу Ассура. Правило Ассура рекомендует начинать структурный анализ и синтез механизмов с неподвижного элемента — стойки и ведущего

звена, а далее наращивать структуру путем последовательного присоединения прочих элементов. Порядок включения элементов в систему будем отображать маршрутом прохождения формообразующих точек, а в более развернутом виде — формулой строения механизма, которая содержит точки и относящиеся к ним связи.

Сначала рассмотрим случай, когда известны (заранее заданы) форма и размеры звеньев, составляющих центроидную пару (в том числе сами центроиды), т. е. выполним структурно-параметрический анализ механизма.

Маршрут прохождения формообразующих точек этой системы имеет вид

$$A, F \rightarrow C \rightarrow B, K, D,$$

а соответствующая ему формула строения

$$\frac{A, F}{l_{AF}} \rightarrow \frac{C}{l_{AC}; \varphi_{AC}^{AB}(t)} \rightarrow \frac{B}{l_{BD}; \varphi_{AB}^{AF}} \frac{K}{l_{AK}(\varphi_{AK}^{AC}); l_{BK}(\varphi_{BK}^{BD})} \frac{D}{\tau(K); n(K)}, \quad (3)$$

где l_{AF} , l_{AC} , l_{BD} , φ_{AB}^{AF} — жесткие связи.

В этой системе восемь стационарных (не содержащих время t) связей. Используя формулу (1), получаем число степеней свободы системы $W = 2 \cdot 6 - 3 - 8 = 1$.

Три жесткие связи $l_{AF} = \text{const}$, $l_{AC} = \text{const}$ и $l_{BD} = \text{const}$ являются вспомогательными, их значения не влияют на кинематику механизма. Жесткая связь $\varphi_{AB}^{AF} = 0$ также непосредственно не относится к центроидной системе.

Межпараметрические связи $l_{AK}(\varphi_{AK}^{AC})$ и $l_{BK}(\varphi_{BK}^{BD})$ представляют собой заранее заданные

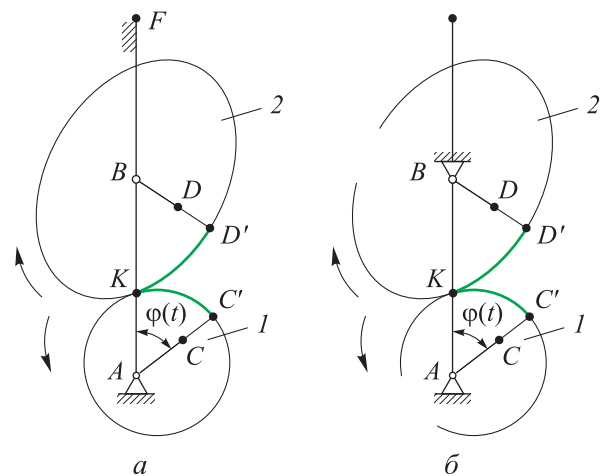


Рис. 3. Расчетные схемы центроидных механизмов системы ВВС в задачах анализа (а) и синтеза (б)

уравнения кривых — профилей звеньев 1 и 2 в полярных координатах. Чтобы облегчить процесс прочтения формулы строения механизма во всех уравнениях кривых, будем заменять длины l на радиус-векторы \mathbf{r} , в том числе l_{AK} и l_{BK} на \mathbf{r}_{AK} и \mathbf{r}_{BK} .

Тангенциальная связь $\tau(K)$ обеспечивает взаимное качение центроид звеньев 1 и 2 без скольжения. Математическое отображение этой связи в дифференциальной форме следует из теоремы Виллиса — это формула (2) или выражение

$$\mathbf{r}_1 d\varphi_1 = \mathbf{r}_2 d\varphi_2. \quad (4)$$

В конечной (интегральной) форме подобная связь означает одинаковую длину дуг $C'K$ и $D'K$ центроид звеньев 1 и 2, где C' и D' — точки пересечения лучей AC и BD с соответствующими центроидами. При аналитическом решении задачи в полярных координатах это условие связи имеет вид

$$\int_0^{\varphi_1} \sqrt{[\mathbf{r}_1(\varphi_1)]^2 + [\mathbf{r}'_1(\varphi_1)]^2} d\varphi_1 = \int_0^{\varphi_2} \sqrt{[\mathbf{r}_2(\varphi_2)]^2 + [\mathbf{r}'_2(\varphi_2)]^2} d\varphi_2, \quad (5)$$

где $\mathbf{r}_1(\varphi_1)$ и $\mathbf{r}_2(\varphi_2)$ — радиус-векторы $\mathbf{r}_{AK}(\varphi_{AK}^{AC})$ и $\mathbf{r}_{BK}(\varphi_{BK}^{BD})$.

Нормальная связь $n(K)$ означает выполнение условия не пересечения, а касания центроид звеньев 1 и 2 в точке K . Согласно теореме Аронгольда — Кеннеди, в трехзвенном центроидном механизме символическое обозначение нормальной связи $n(K)$ можно заменить эквивалентным и более конкретным условием $\alpha_{AK}^{AF} = 0$. Ведомое звено 2 совершает сложное движение: оно вращается вокруг точки B , но точка B тоже перемещается по вертикальной прямой AF . Соответственно, неизвестными в задаче анализа являются функции $\varphi_{BD}^{BA}(\varphi_{AC}^{AB})$ и $l_{AB}(\varphi_{AC}^{AB})$.

Функция $\varphi_{BD}^{BA}(\varphi_{AC}^{AB})$ подлежит определению на основании выражения (5). Однако в связи с тем, что искомым параметр φ_{BD}^{BA} стоит под знаком интеграла, соответствующая вычислительная операция представляет определенную сложность. Подобная сложность будет возникать во всех случаях, когда тангенциальная связь присутствует в задаче анализа. Эту особенность целесообразно отобразить в формулах строения центроидных механизмов введением дополнительного индекса «а»: $\tau_a(K)$.

С учетом уточнения в обозначениях формула (3) преобразуется следующим образом:

$$\frac{A, F}{l_{AF}} \rightarrow \frac{C}{l_{AC}; \varphi_{AC}^{AB}(t)} \rightarrow \rightarrow \frac{B}{l_{BD}; \varphi_{AB}^{AF}} \frac{K}{\mathbf{r}_{AK}(\varphi_{AK}^{AC}); \mathbf{r}_{BK}(\varphi_{BK}^{BD})} \frac{D}{\tau_a(K); \alpha_{AK}^{AF} = 0}. \quad (6)$$

Формула (6) характеризует взаимодействие центроид фрикционного типа или расчетных центроид зубчатых колес.

Можно ли сделать так, чтобы точка B оставалась неподвижной? В рамках задачи анализа при произвольно заданных центроидах механизма с фрикционными парами нельзя, а в зубчато-центроидном механизме — с определенными ограничениями можно.

Рассмотрим зацепление двух круглых колес (рис. 4), оси валов которых смещены относительно геометрических центров их зубчатых венцов на одинаковое расстояние e . Существует (рис. 4, а) такое положение этих колес, в котором их зубья взаимодействуют по двум боковым поверхностям без зазоров. При том же межосевом расстоянии a_w , но в другом положении колес (рис. 4, б) их зубья взаимодействуют с большим боковым зазором. Допустимое значение эксцентриситета e определяется формой зубьев. Для эвольвентных колес приемлемо значение эксцентриситета, приводящее к изменению начального шага зубьев (шага по центроидам) в пределах 10%. Радиус-вектор фактических центроид этих зубчатых колес варьируется в тех же пределах.

Решая задачу синтеза, точку B можно оставить неподвижной для механизма как с фрикционной центроидной парой, так и с зубчатой.

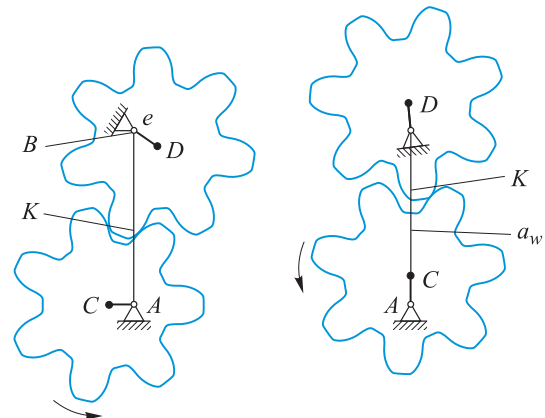


Рис. 4. Схемы системы ВВС с круглыми зубчатыми звеньями, эксцентричными относительно осей вращения звеньев

Формула строения центроидного механизма системы ВВС в задаче синтеза. Известны центроида и контуры звена 1, а также межосевое расстояние a_w . Надо найти центроиду и контуры звена 2 (рис. 3, б).

Формула строения такого центроидного механизма имеет вид

$$\frac{A, B}{l_{AB}} \rightarrow \frac{C}{l_{AC}; \varphi(t)_{AC}^{AB}} \rightarrow \rightarrow \frac{K}{l_{BD}; \mathbf{r}_{AK}(\varphi_{AK}^{AC}) \tau_s(K); \alpha_{AK}^{AF} = 0} \rightarrow \frac{D}{o/K/}, \quad (7)$$

где l_{AB} — связь, задающая постоянное межосевое расстояние, $l_{AB} = \text{const}$; l_{AC} и l_{BD} — жесткие вспомогательные связи; $\mathbf{r}_{AK}(\varphi_{AK}^{AC})$ — связь, соответствующая профилю центроиды звена 1; $\tau_s(K)$ — тангенциальная связь в задаче синтеза, характеризующая качение профилей без скольжения; $\alpha_{AK}^{AF} = 0$ — связь, вытекающая из теоремы Аронгольда — Кеннеди, обеспечивающая выполнение условия зацепления $n(K)$.

В рассматриваемой задаче синтеза (при фиксированном межосевом расстоянии a_w) тангенциальную связь $\tau_s(K)$ зададим так. Подставляя в следующее из теоремы Виллиса соотношение (4) $\mathbf{r}_2(\varphi_2) = a_w - \mathbf{r}_1(\varphi_1)$, получаем выражение

$$d\varphi_2 = \frac{d\varphi_1 \mathbf{r}_1}{a_w - \mathbf{r}_1(\varphi_1)}$$

и интегрируем его

$$d\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{\mathbf{r}_1}{a_w - \mathbf{r}_1(\varphi_1)} d\varphi_1.$$

Замечаем, что вычисление параметра φ_2 (φ_{BA}^{BD}) в задаче синтеза происходит значительно проще, чем в задаче анализа.

В результате решения задачи синтеза можно построить центроиду колеса 2 с помощью метода компьютерного моделирования. Искомый контур выглядит, как огибающая семейства кривых-контуров центроиды звена 1. Положение звена 1 по отношению к остановленному звену 2 рассчитано с заданным шагом по параметру $\varphi_{AC}^{AB}(t)$.

На практике важно иметь не графически заданный контур центроиды, а профиль некруглого зубчатого колеса 2. В этом случае заранее должна быть известна не только центроида колеса 1, но и профиль его зубчатого венца. Во множестве положений будет построена не центроида, а само колесо 1. Огибающая семейства

профилей его зубчатого венца будет контуром зубчатого венца синтезируемого колеса 2. В формуле строения механизма (7) соответствующая операция отображена связью $o/K/$.

Проверяем число степеней свободы системы (7), где число точек — 6, уравнений связи — 10 (без учета $\varphi_{OB}^{OA}(t)$ и $o/K/$): $W + 2 \cdot 7 - 3 - 10 = 1$.

Центроиды звеньев 1 и 2 изображены на рис. 3, б незамкнутыми. Чтобы оба звена совершили полный оборот, между числами волн этих звеньев и длинами их центроид должно выполняться четкое соотношение обратной пропорции.

Несмотря на то, что задачу синтеза некруглых зубчатых колес механизма ВВС неоднократно решали многие авторы [12–14], общепринятых стандартных методик пока нет.

Синтез планетарного механизма системы ВСС при заданной центроиде ротора. Расчетная схема планетарной гидромашины с центральными колесами, эксцентричными оси их относительного вращения, приведена на рис. 5. То обстоятельство, что звенья 1 и 2 являются номинально круглыми, на общность рассуждений не влияет, так как их центроиды заданы в виде произвольной функции. Во всех рассматриваемых версиях решения подобной задачи заранее известен профиль зубчатого венца круглого сателлита 3.

Сначала рассмотрим алгоритм расчета, приведенный в работах [15, 16], где дополнительно к контуру сателлита 3 изначально задана центроида солнечной шестерни, т. е. ротора 1.

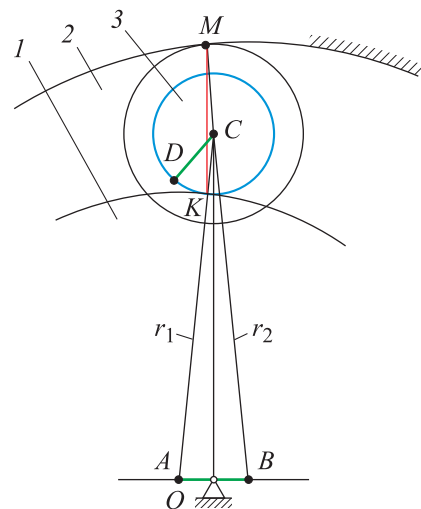


Рис. 5. Расчетная схема планетарной гидромашины с центральными колесами, эксцентричными оси их относительного вращения

Маршрут прохождения формообразующих точек имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{O, B}{l_{OB}} &\rightarrow \frac{A}{l_{OA}; \varphi_{OB}^{OA}(t)} \rightarrow \frac{K}{\varphi_{OK}^{OA} = i\varphi_{OA}^{OB}; \mathbf{r}_{OK}(\varphi_{OK}^{OA})} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{C}{l_{CD}; \mathbf{r}_{CK}} \frac{D}{n(K); \tau_a(K)} \rightarrow \\ &\rightarrow o/K/; o/M/ \rightarrow \frac{M}{\alpha_{OM}^{OK} = 0; n/C_M/}, \quad (8) \end{aligned}$$

где l_{OB} — жесткая связь; l_{OA} , l_{CD} — вспомогательные связи; i — постоянный коэффициент — передаточное число от ротора к мнимому водилу; $n/C_M/$ — вид нормальной связи, которая характеризует перпендикулярное расположение радиус-вектора \mathbf{r}_{CM} спутника 3 относительно касательной к траектории его центра.

Связи $\varphi_{OK}^{OA} = i\varphi_{OA}^{OB}$ и $\mathbf{r}_{OK}(\varphi_{OK}^{OA})$, которые относятся к точке K , в совокупности задают центроиду звена 1 как функцию угла его поворота относительно стойки, т. е. звена 2.

Связи, относящиеся к точкам C и D , определяют положение спутника 3. Радиус-вектор \mathbf{r}_{CK} центроида спутника 3 в зацеплении с солнечной шестерней 1 задан изначально и принят постоянным. Чтобы зубья солнечной шестерни 1 имели надлежащую форму, значение этого радиус-вектора рассчитывается в зависимости от чисел зубьев и волн центральных колес. Нормальная связь $n/K/$ характеризует положение радиус-вектора \mathbf{r}_{CK} спутника 3 относительно центроида ротора 1. Тангенциальная связь $\tau_a(K)$ обеспечивает качение центроидов звеньев 1 и 3 без скольжения. Условия, определяющие положение точки K , соответствуют задаче анализа. Используемый в работах [15, 16] алгоритм расчета параметров, характеризующих связь $\tau_a(K)$ с необходимой точностью, достаточно сложный.

Профиль зубчатого венца звена 1 определяется средствами компьютерной графики как огибающая семейства контуров спутника 3. В формуле строения механизма (8) этому действию соответствует связь $o/K/$.

Далее можно сразу приступить к синтезу контура зубчатого венца эпицикла 2. Профиль зубчатого венца спутника 3 известен заранее, а параметры, характеризующие положение спутника относительно эпицикла 2, к моменту синтеза его контура уже найдены. Искомый контур зубчатого венца эпицикла 2 строится с помощью компьютерной графики как огибающая контуров спутника 3 в системе отсчета,

связанной с эпициклом. Соответствующая связь в формуле (8) — $o/M/$.

На этом этапе проектирования механизма остается неизвестным положение точки M контакта центроид спутника 3 и эпицикла 2. Чтобы найти координаты этой точки, надо решить задачу анализа на базе условий $\alpha_{OM}^{OK} = 0$; $n/C_M/$. Связь $\alpha_{OM}^{OK} = 0$ вытекает из теоремы Аронгольда — Кеннеди. Отметим, что на практике искать точку M необязательно, так как искомый профиль эпицикла 2 уже получен.

Проверяя число степеней свободы системы (8), получаем $W = 2 \cdot 7 - 3 - 10 = 1$ (без учета связей $\varphi_{OB}^{OA}(t)$; $o/K/$ и $o/M/$).

Отметим, что центроидный механизм, схема которого показана на рис. 5, можно реализовать только с зубчатыми колесами, причем использование указанного маршрута прохождения формообразующих точек не гарантирует высоких показателей качества зацепления звеньев 2 и 3.

Синтез планетарного механизма системы ВСС по заданному закону движения центра спутника. Несколько видоизмененный алгоритм проектирования планетарной системы ВСС предложен в работе [17]. Здесь дополнительно к контуру спутника 3 изначально задана не центроида ротора 1, а траектория центра спутника.

Расчетная схема та же, что и показанная на рис. 5, а формула строения механизма имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{O, B}{l_{OB}} &\rightarrow \frac{A}{l_{OA}; \varphi_{OB}^{OA}(t)} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{C}{\varphi_{OC}^{OB} = i\varphi_{OA}^{OB}; \mathbf{r}_{OC}(\varphi_{OC}^{OB})} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{D}{l_{CD}; \mathbf{r}_{CK}} \frac{K}{n/C_K/; \tau_s(K)} \rightarrow \\ &\rightarrow o/K/; o/M/ \rightarrow \frac{M}{\alpha_{OM}^{OK} = 0; n/C_M/}, \quad (9) \end{aligned}$$

где $\varphi_{OC}^{OB} = i\varphi_{OA}^{OB}$ — функция, связывающая углы поворота мнимого водила и ротора; $\mathbf{r}_{OC}(\varphi_{OC}^{OB})$ — связь, задающая переменное межосевое расстояние спутника с центральными колесами; \mathbf{r}_{CK} — постоянный радиус-вектор центроида спутника 3 в зацеплении с ротором, вычисленный заранее; $n/C_K/$ — условие связи, характеризующее нормальное расположение радиус-вектора \mathbf{r}_{CK} спутника 3 относительно траектории его центра. В отличие от предыдущего алгоритма; $\tau_s(K)$ — тангенциальная связь, конкретизируемая применительно к задаче синтеза, что суще-

ственно упрощает расчеты, предшествующие графическим построениям.

Далее, как и в предыдущем случае, строятся контуры ротора и статора 2, т. е. реализуются связи $o/K/$ и $o/M/$.

Отметим следующие две принципиальные особенности:

- в обоих алгоритмах синтеза планетарного механизма (8) и (9) присутствует связь $\varphi_{OC}^{OB} = i\varphi_{OA}^{OB}$, содержащая передаточное число i ; при этом все сателлиты механизма как бы связаны общим водилом и сохраняют возможность перемещения в радиальном направлении, но находятся друг от друга на одинаковом угловом расстоянии;

- в обоих вариантах синтеза (8) и (9) применительно к контакту K сателлита с ротором радиус-вектор центроиды сателлита r_{CK} остается неизменным; получаемые в процессе обкатки зубья ротора будут иметь форму, близкую к расчетной; в случае же контакта M сателлита с эпициклом 2 радиус-вектор центроиды сателлита r_{CM} постоянным не является и заранее неизвестен; точка M на некоторых участках венца эпицикла может располагаться от точки C на расстоянии, значительно превышающем расчетный начальный радиус-вектор сателлита; в итоге форма зубьев эпицикла может существенно отличаться от оптимальной, например, как в механизме [17], показанном на рис. 6.

Необходимо сделать так, чтобы радиус-вектор центроиды сателлита в точке M всегда соответствовал расчетному, а зубья эпицикла на всех его участках имели приемлемую форму.

Система ВСС с самоустанавливающимся сателлитом. Решение этой проблемы сводится к обеспечению постоянства радиус-вектора центроиды сателлита r_{CM} , взаимодействующей с эпициклом в точке M . Система, отвечающая

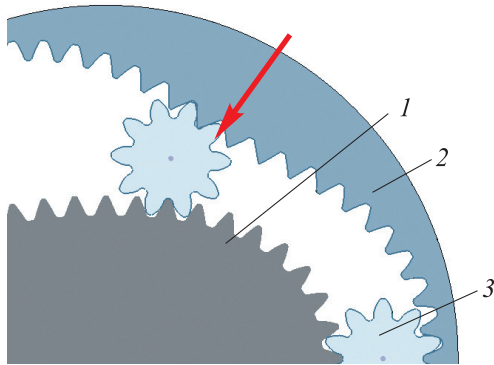


Рис. 6. Модель неприемлемой формы зубьев эпицикла на отдельных участках его венца

подобному условию, может иметь форму строения

$$\begin{aligned} O, B \xrightarrow{l_{OB}} \xrightarrow{l_{OA}; \varphi_{OA}^{OB}(t)} \xrightarrow{\varphi_{OK}^{OA} = i\varphi_{OA}^{OB}; r_{OK}(\varphi_{OK}^{OA})} K \xrightarrow{} \\ \rightarrow \xrightarrow{l_{CD}; r_{CK}} \xrightarrow{r_{CM}; n/C_K / \alpha_{OM}^{OK} = 0; \tau_a(K)} M \xrightarrow{} \\ \rightarrow o/K/; o/M/. \end{aligned} \quad (10)$$

Отличием этой системы от описываемой формулой (8) является то, что в состав выражения (10) вместо нормальной связи $n/C_K/$ вошла связь $r_{CM} = \text{const}$. Это потребовало соединения условий связи, относящихся к точкам C , D и M , в общую структурную группу. Синтез контуров зубчатых венцов ротора и статора (т. е. реализация связей $o/K/$ и $o/M/$) в этой системе может выполняться только после завершения всех вычислительных операций.

При использовании системы синтеза, характеризуемой выражением (10), сателлиты перестают принадлежать единому мнимому водилу, а все зубья ротора и статора приобретают приемлемую (расчетную) форму. Недостаток этого алгоритма синтеза центроидной системы ВСС состоит в сложности выполнения необходимых расчетов.

Независимый синтез некруглых зубчатых венцов центральных звеньев планетарного механизма системы ВСС. Самым простым способом обеспечения постоянного радиус-вектора r_{CM} центроиды сателлита, взаимодействующего с эпициклом, является независимый синтез по следующим маршрутам:

- для зубчатых венцов звеньев первого звена

$$\begin{aligned} O, A \xrightarrow{l_{OA}} \xrightarrow{\varphi_{OC}^{OA}(t); r_{OC}(\varphi_{OC}^{OA})} C \xrightarrow{} \\ \rightarrow \xrightarrow{l_{CD}; \tau_s(K) r_{CK}; n/C_K /} K \xrightarrow{} \\ \rightarrow o/K/; \end{aligned} \quad (11)$$

- для зубчатых венцов звеньев второго звена

$$\begin{aligned} O, B \xrightarrow{l_{OB}} \xrightarrow{\varphi_{OC}^{OB}(t); r_{OC}(\varphi_{OC}^{OB})} C \xrightarrow{} \\ \rightarrow \xrightarrow{l_{CD}; \tau_s(M) r_{CM}; n/C_M /} M \xrightarrow{} \\ \rightarrow o/M/. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом заранее тем или иным способом должна быть определена связь между параметрами траекторий центра сателлита в системах координат первого и второго центральных зубчатых колес. В работах [18, 19] предложено задавать радиус-векторы $r_1(\varphi_1)$ и $r_2(\varphi_2)$, т. е.

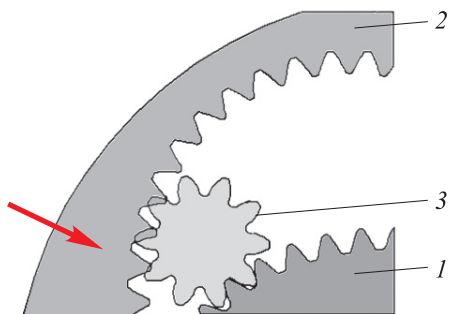


Рис. 7. Модель, отражающая интерференцию зубьев

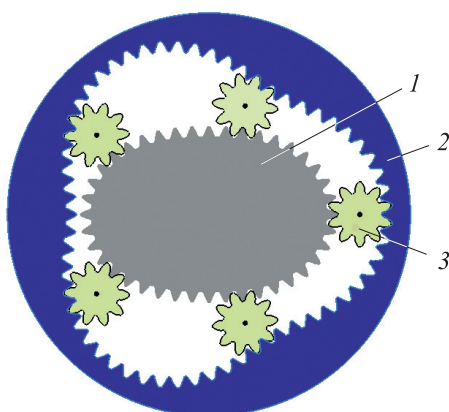


Рис. 8. Модель планетарного механизма системы ВСС

$r_{oc}(\varphi_{oc}^{OA})$ и $r_{oc}(\varphi_{oc}^{OB})$, однотипными циклическими функциями

$$r_1(\varphi_1) = r_0 [1 + kF(L\varphi_1)]; \quad (13)$$

$$r_2(\varphi_2) = r_0 [1 + kF(N\varphi_2)], \quad (14)$$

где φ_1 и φ_2 — текущие углы поворота мнимого водила в полярных координатах, связанных с соответствующими звеньями; L и N — числа циклов (волн) для первого и второго центральных колес; r_0 — радиус расчетной окружности, в которую вырождаются обе траектории при $k = 0$; k — коэффициент некруглости траекторий.

Недостатком этой методики проектирования планетарного механизма с некруглыми звеньями является наблюдаемая интерференция зубьев (рис. 7), которую приходится компенсировать увеличенными радиальными зазорами в зацеплениях.

Литература

- [1] Литвин Ф.Л. *Некруглые зубчатые колеса*. Москва, Ленинград, Машгиз, 1956. 312 с.
- [2] Фадюшин Д.В. Повышение характеристик пневматических роторных машин за счет модификации геометрических параметров планетарного механизма. Дисс. ... канд. тех. наук. Челябинск, 2022. 139 с.

В рамках алгоритма независимого синтеза зубчатых венцов звеньев 1 и 2 отмеченную интерференцию зубьев можно устранить, добавив в уравнение (14) некоторую полуэмпирическую корректирующую функцию δ_r :

$$r_2(\varphi_2) = r_0 [1 + kF(N\varphi_2)] + \delta_r.$$

При этом уравнение (13) остается неизменным.

Соответствующая методика геометрического проектирования, разработанная для планетарных гидромашин, описана в работе [20]. Контуры зубчатых звеньев, полученные по такому алгоритму, показаны на рис. 8. Интерференция отсутствует. Зубья имеют правильную (расчетную) форму на всех участках зубчатых венцов эпицикла 2 и 1.

Выводы

1. Переход от классической концепции структурирования механизма, согласно которой последний представляет собой систему звеньев, связанных кинематическими парами, к свойственному аналитической механике базисному уровню структурирования (точки — уравнения связи), делает описание механизма значительно более содержательным и компактным.

2. Разработанные формулы строения (6)–(12) несут в себе почти всю информацию, необходимую для анализа и сопоставления алгоритмов проектирования трехзвенных центроидных механизмов.

3. По результатам проведенного исследования выбрана методика синтеза планетарного механизма с некруглыми зубчатыми колесами и плавающими сателлитами, обеспечивающая высокие показатели качества зацеплений и доступная широкому кругу инженеров-проектировщиков.

4. Разработанные приемы точечного описания механических систем с высшими парами можно использовать при решении различных задач, относящихся к теории механизмов и машин.

- [3] Sliwinski P. The methodology of design of satellite working mechanism of positive displacement machine. *Sci. Rep.*, 2022, vol. 12, art. 113685, doi: <https://doi.org/10.1038/s41598-022-18093-z>
- [4] Hasse T. *Über die vielfältigen Möglichkeiten, unrunde Zahnräder für typische Getriebeaufgaben der Technik optimal auszulegen?* URL: http://www.optimasimula.de/downloads/moeglichkeiten_unrundraeder.pdf (дата обращения: 18.04.2022).
- [5] Лурье А.И. *Аналитическая механика*. Москва, ГИФМЛ, 1961. 824 с.
- [6] Шукелис Н.О. Метод точечных отображений звеньев в кинематике пространственных механизмов. *Труды Латвийской сельскохозяйственной академии.*, 1971, № 32, с. 18–30.
- [7] Волков Г.Ю. О построении универсального языка описания механизмов. В: *Теория механизмов, прочность машин и аппаратов*. Курган, КГУ, 1997, с. 49–58.
- [8] Волков Г.Ю. *Формализация описания, систематика и структурный синтез плоских механизмов*. Курган, КГУ, 2014. 55 с.
- [9] Литвин Ф.Л. *Теория зубчатых зацеплений*. Москва, Наука, 1968. 584 с.
- [10] Mallik A.K., Ghosh A., Dittirich G. *Kinematic analysis and synthesis of mechanisms*. CRC Press, 1994. 668 p.
- [11] Артоболевский И.И. *Теория механизмов и машин*. Москва, Наука, 1988. 640 с.
- [12] Киреев С.О., Ершов Ю.В., Падалко Н.А. Расчет параметров зубьев для изготовления овальных шестерен. *Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Технические науки*, 2010, № 1, с. 76–78.
- [13] Prikhodko A.A. Experimental kinematic analysis of an intermittent motion planetary mechanism with elliptical gears. *J. Meas. Eng.*, 2020, vol. 8, no. 3, pp. 122–131, doi: <https://doi.org/10.21595/jme.2020.21583>
- [14] Волков Г.Ю., Фадюшин Д.В., Голованев В.А. Профилирование некруглых зубчатых колес для передач с фиксированным межосевым расстоянием по методу виртуальной обкатки. *Сборка в машиностроении, приборостроении*, 2022, т. 23, № 10, с. 452–458, doi: <https://doi.org/10.36652/0202-3350-2022-23-10-452-458>
- [15] Ан И-Кан. *Синтез, геометрические и прочностные расчеты планетарных механизмов с некруглыми зубчатыми колесами роторных гидромашин*. Автореф. дисс. ... док. тех. наук. Томск, 2001. 35 с.
- [16] Ан И-Кан. Синтез центроид планетарной передачи с некруглыми колесами. В: *Механика и машиностроение. Сборник трудов ТПУ*. Томск. ТПУ, 2000, с. 288–290.
- [17] Volkov G., Fadyushin D., Vedernikov M. Geometric calculation of non-circular gear segments of the planetary mechanism in rotary hydraulic machines. *E3S Web Conf.*, 2023, vol. 389, art. 01017, doi: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202338901017>
- [18] Волков Г.Ю., Курасов Д.А., Горбунов М.В. Инженерный метод геометрического синтеза планетарного механизма роторной гидромашин. *Вестник машиностроения*, 2017, № 10, с. 10–15.
- [19] Смирнов В.В. *Обоснование выбора кинематических схем и совершенствование метода геометрического расчета механизмов планетарных роторных гидромашин с плавающими сателлитами*. Дисс. ... канд. тех. наук. Челябинск, 2021. 181 с.
- [20] Волков Г.Ю., Алексеева Ю.В. Уточненный метод расчета профилей некруглых зубчатых колес планетарного механизма роторной гидромашин. *Автоматизированное проектирование в машиностроении*, 2023, № 15, с. 47–50, doi: <https://doi.org/10.26160/2309-8864-2023-15-47-50>

References

- [1] Litvin F.L. *Nekruglye zubchatye kolea* [Non-circular gear wheels]. Moscow, Leningrad, Mashgiz Publ., 1956. 312 p. (In Russ.).
- [2] Fadyushin D.V. *Povyshenie kharakteristik pnevmaticheskikh rotornykh mashin za schet modifikatsii geometricheskikh parametrov planetarnogo mekhanizma*. Diss. kand. tekhn. nauk [Increase of characteristics of pneumatic rotor machines due to modification of geometrical parameters of planetary mechanism. Kand. tech. sci. diss.]. Chelyabinsk, 2022. 139 p. (In Russ.).

- [3] Sliwinski P. The methodology of design of satellite working mechanism of positive displacement machine. *Sci. Rep.*, 2022, vol. 12, art. 113685, doi: <https://doi.org/10.1038/s41598-022-18093-z>
- [4] Hasse T. *Über die vielfältigen Möglichkeiten, unrunde Zahnräder für typische Getriebeaufgaben der Technik optimal auszulegen?* URL: http://www.optimasimula.de/downloads/moeglichkeiten_unrundraeder.pdf (accessed: 18.04.2022).
- [5] Lurye A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytic mechanics]. Moscow, GIFML Publ., 1961. 824 p. (In Russ.).
- [6] Shukelis N.O. Method of point mappings of links in kinematics of spatial mechanisms. *Trudy Latviyskoy selskokhozyaystvennoy akademii*, 1971, no. 32, pp. 18–30. (In Russ.).
- [7] Volkov G.Yu. O postroenii universalnogo yazyka opisaniya mekhanizmov [On the construction of a universal language for describing mechanisms]. In: *Teoriya mekhanizmov, prochnost mashin i apparatov* [In: Theory of mechanisms, strength of machines and apparatuses]. Kurgan, KGU Publ., 1997, pp. 49–58. (In Russ.).
- [8] Volkov G.Yu. *Formalizatsiya opisaniya, sistematika i strukturnyy sintez ploskikh mekhanizmov* [Formalization of description, systematics and structural synthesis of planar mechanisms]. Kurgan, KGU Publ., 2014. 55 p. (In Russ.).
- [9] Litvin F.L. *Teoriya zubchatykh zatseplenykh* [Gear theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 584 p. (In Russ.).
- [10] Mallik A.K., Ghosh A., Dittirich G. *Kinematic analysis and synthesis of mechanisms*. CRC Press, 1994. 668 p.
- [11] Artobolevskiy I.I. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 640 p. (In Russ.).
- [12] Kireev S.O., Ershov Yu.V., Padalko N.A. Calculation of parameters for fabrication oval wheels. *Izvestiya VUZov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskije nauki* [Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Technical Sciences], 2010, no. 1, pp. 76–78. (In Russ.).
- [13] Prikhodko A.A. Experimental kinematic analysis of an intermittent motion planetary mechanism with elliptical gears. *J. Meas. Eng.*, 2020, vol. 8, no. 3, pp. 122–131, doi: <https://doi.org/10.21595/jme.2020.21583>
- [14] Volkov G.Yu., Fadyushin D.V., Golovanov V.A. Profiling of non-circular gears for gears with a fixed axial distance using the virtual running-in method. *Sbornik v mashinostroenii, priborostroenii* [Assembling in Mechanical Engineering and Instrument-Making], 2022, vol. 23, no. 10, pp. 452–458, doi: <https://doi.org/10.36652/0202-3350-2022-23-10-452-458> (in Russ.).
- [15] An I-Kan. *Sintez, geometricheskie i prochnostnye raschety planetarnykh mekhanizmov s nekruglymi zubchatymi kolesami rotornykh gidromashin*. Avtoref. diss. dok. tekhn. nauk [Synthesis, geometrical and strength calculations of planetary mechanisms with non-circular gears of rotary hydraulic machines. Abs. doc. tech. sci. diss.]. Tomsk, 2001. 35 p. (In Russ.).
- [16] An I-Kan. [Synthesis of centroid of planetary gear with non-circular wheels]. V: *Mekhanika i mashinostroenie. Sbornik trudov TPU* [In: Mechanics and mechanical engineering. Proceedings of TPU]. Tomsk. TPU, 2000, pp. 288–290. (In Russ.).
- [17] Volkov G., Fadyushin D., Vedernikov M. Geometric calculation of non-circular gear segments of the planetary mechanism in rotary hydraulic machines. *E3S Web Conf.*, 2023, vol. 389, art. 01017, doi: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202338901017>
- [18] Volkov G.Yu., Kurasov D.A., Gorbunov M.V. Geometric synthesis of the planetary mechanism for a rotary hydraulic machine. *Vestnik mashinostroeniya*, 2017, no. 10, pp. 10–15. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. Engin. Res.*, 2018, vol. 38, pp. 1–6, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068798X18010161>)
- [19] Smirnov V.V. *Obosnovanie vybora kinematicheskikh skhem i sovershenstvovanie metoda geometricheskogo rascheta mekhanizmov planetarnykh rotornykh gidromashin s plavayushchimi satellitami*. Diss. kand. tekhn. nauk [Substantiation of kinematic schemes choice and improving method for geometric calculation of mechanisms of planetary rotary hydraulic machines with floating satellites. Kand. tech. sci. diss.]. Chelyabinsk, 2021. 181 p. (In Russ.).
- [20] Volkov G.Yu., Alekseeva Yu.V. Improved method for calculating profiles of noncircular gears of an epicyclic gear train of a rotor hydraulic machine. *Avtomatizirovannoe proektirovanie v mashinostroenii*, 2023, no. 15, pp. 47–50, doi: <https://doi.org/10.26160/2309-8864-2023-15-47-50> (in Russ.).

Информация об авторах

ВОЛКОВ Глеб Юрьевич — доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Машиностроение». ФГБОУ ВО «Курганский государственный университет» (640020, Курган, Российская Федерация, ул. Советская, д. 63, стр. 4, e-mail: vlkv48@mail.ru).

АЛЕКСЕЕВА Юлия Викторовна — преподаватель. ГБПОУ «Курганский промышленный техникум» (640003, Курган, Российская Федерация, ул. Т. Невежина, д. 26, e-mail: yulia757095@gmail.com).

Information about the authors

VOLKOV Gleb Yurievich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Mechanical Engineering. Kurgan State University (640020, Kurgan, Russian Federation, Sovetskaya St., Bldg. 63, Block 4, e-mail: vlkv48@mail.ru).

ALEKSEEVA Yulia Viktorovna — Lecturer. Kurgan Industrial Technical School (640003, Kurgan, Russian Federation, T. Nevegina St., Bldg. 26, e-mail: yulia757095@gmail.com).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Волков Г.Ю., Алексеева Ю.В. Трехзвенный центроидный механизм как несвободная система формообразующих точек. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2026, № 3, с. 26–37.

Please cite this article in English as:

Volkov G.Yu., Alekseeva Yu.V. Three-link centroid mechanism as a non-free system of forming points. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2026, no. 3, pp. 26–37.



Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
предлагает читателям монографию

«Аспекты математического моделирования объемного гидропривода с машинным управлением»

Автор Г.В. Птицын

В монографии рассмотрены аспекты математического моделирования объемного гидропривода с машинным управлением, относящегося к силовым приводным системам, сложным для моделирования и модельных исследований, что обусловлено взаимосвязанными и взаимовлияющими особенностями их схемных решений и конструкций, рабочих режимов и условий эксплуатации в различных изделиях различного назначения.

Книга предназначена для машиностроителей — ученых и инженеров, участвующих в научно-исследовательских и опытно-конструкторских работах по созданию, модернизации и модификации силовых гидроприводных систем и их элементов; будет интересна и полезна докторантам и аспирантам научных специальностей: 2.5.2 «Машиноведение»; 2.5.10 «Гидравлические машины, вакуумная, компрессорная техника, гидро- и пневмосистемы»; 2.5.11 «Наземные транспортно-технологические средства и комплексы»; 2.3.7 «Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования», а также может быть применена в образовательном процессе по вузовским программам инженерных специальностей 15.04.02.01 «Гидравлические машины и гидропневмоагрегаты» и 15.04.02.02 «Системы гидравлических и пневматических приводов».

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; <https://press.bmstu.ru>