



РЯХОВСКИЙ

Олег Анатольевич
доктор технических наук,
профессор, зав. кафедрой
«Основы конструирования
машин»



СОРОКИН

Федор Дмитриевич
доктор технических наук,
профессор кафедры
«Прикладная механика»



БАЙКОВ

Борис Александрович
кандидат технических
наук, доцент
кафедры «Основы
конструирования машин»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)
e-mail: baykovboris@mail.ru

Расчет и конструирование компенсирующей муфты с промежуточным стальным гибким диском

О.А. Ряховский, Ф.Д. Сорокин, Б.А. Байков

Описана конструкция сдвоенной компенсирующей муфты. Рассчитаны компенсирующие параметры муфты и выполнена оценка циклической прочности гибкого диска.

Ключевые слова: компенсирующая муфта, гибкий диск, вращающий момент, усталостная прочность.

Calculation and design of expansion joints with intermediate steel flexible disk

O.A. Ryakhovsky, F.D. Sorokin, B.A. Baykov

The design of the double expansion joint is described. The offset-reducing coupling parameters are calculated and the estimation of a floppy disk cyclic strength is carried out.

Keywords: expansion joint, flexible disk, torque, fatigue strength.

Муфта служит для соединения валов электродвигателя и насоса, а также для передачи вращающего момента.

Муфта благодаря применению гибкого металлического диска, соединенного с полумуфтами в отдельных точках силами трения, допускает значительные взаимные угловые смещения полумуфт при малых дополнительных нагрузках на соединяемые валы и их опоры. Муфта является жесткой при действии вращающего момента и способна передавать большие моменты. Наиболее напряженная деталь муфты — гибкий металлический диск, испытывающий циклические деформации изгиба и кручения при угловом смещении полумуфт, вращении муфты.

Муфта состоит из полумуфт 1 и 5, пальцев 4, запрессованных в полумуфты с натягом, и гибкого промежуточного диска 3 (рис. 1). За счет высокой изгибной податливости тонкого диска 3 при угловом смещении осей валов муфта позволяет соединять валы, имеющие угловые смещения. Диск 3 является наиболее напряженной деталью, которая определяет ресурс муфты, так как гибкий диск испытывает циклические деформации изгиба и кручения при вращении соединяемых валов (рис. 2).

Муфта взрывобезопасна, т. е. не вызывает искрения от соударения деталей после усталостного разрушения гибкого диска. Это достигается благодаря тому, что на шайбу 7, прижимающую гибкий диск к полумуфте 5, на-

пресовано латунное кольцо 8, которое не вызывает искрения при соударении шайбы 7 с полумуфтой 1 (см. рис. 1). Между кольцом 8 и отверстием в полумуфте 1 предусмотрен радиальный зазор 2...3 мм. При этом даже после

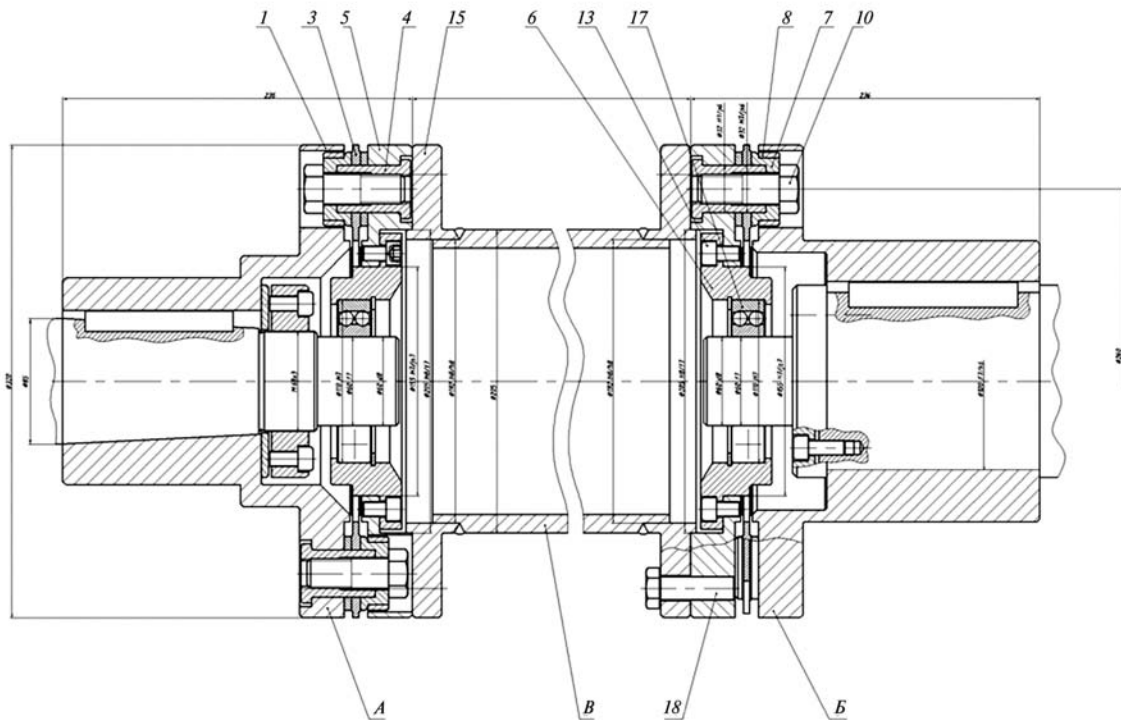


Рис. 1. Комбинация двух компенсирующих муфт с промежуточным валом

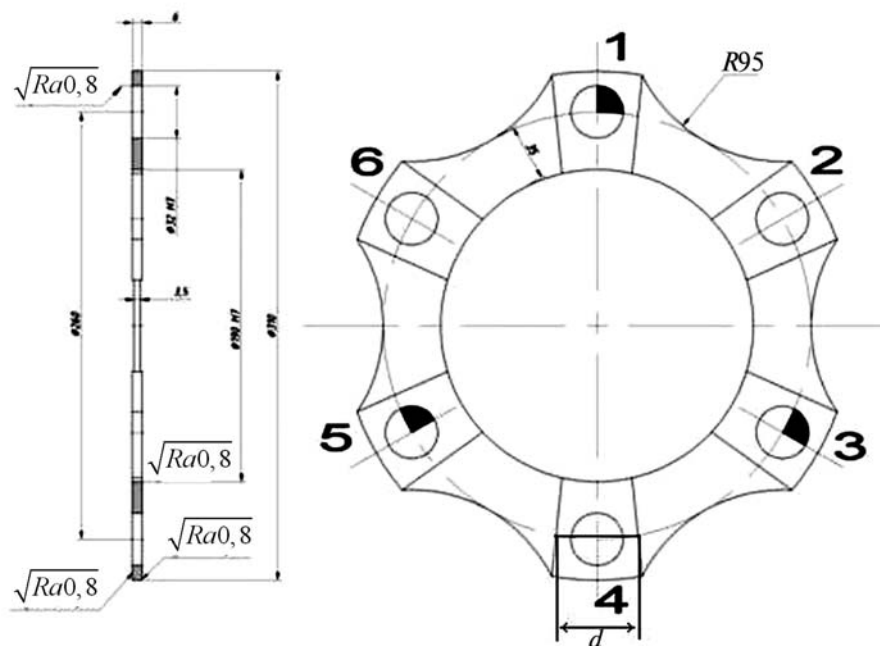


Рис. 2. Гибкий диск муфты

разрушения гибкого диска муфта продолжает передавать вращающий момент с одной полу-муфты на другую благодаря зацеплению кольца 8 с полу-муфтой 1.

Если две муфты *A* и *B* соединить промежуточным валом *B*, то такая конструкция допускает радиальное смещение осей соединяемых валов электродвигателя и насоса при угловых смещениях осей валов, допускаемых каждой муфтой (рис. 3).

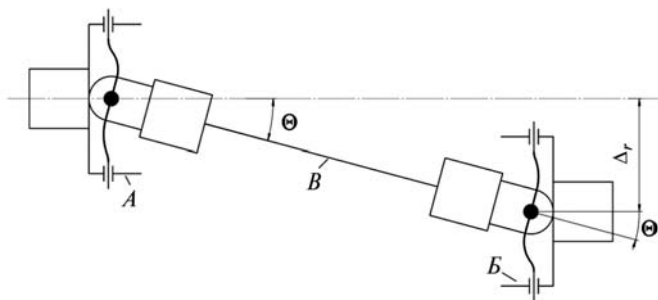


Рис. 3. Смещение осей валов, соединяемых муфтами с промежуточным валом

При угловом смещении полу-муфт участки диска 3 испытывают упругие деформации изгиба и кручения, а на концы валов, соединенных муфтами, действует реактивный изгибающий момент, дополнительно нагружающий валы и их опоры. В зависимости от положения муфты при ее повороте вокруг оси вращения значение изгибающего момента циклически меняется. Таким образом при угловых смещениях осей валов муфта возбуждает колебания.

В каждой муфте (см. рис. 1) имеется шарнирная опора 17 в виде двухрядного шарикового сферического подшипника. Эти шарнирные опоры разгружают диски 3 от воздействия радиальных сил, вызванных несбалансированностью промежуточного вала *B* и действием его веса. Внутреннее кольцо сферического подшипника установлено на шип вала по посадке с зазором. Наружное кольцо сферического подшипника установлено по посадке с зазором в кольцо 6 и зафиксировано от осевых смещений. Кольцо 6 соединено с полу-муфтой 5 винтами 13. Винты 18, расположенные по окружности, соединяют фланцы 15, приваренные к полумуфте *B*, с полу-муфтами 5.

Расчет жесткости и циклической прочности гибкого элемента муфты. Наименее прочной деталью муфты является гибкий стальной диск, который испытывает циклические деформации при вращении муфты, имеющей взаимные смещения полу-муфт. Отказ муфты произойдет в первую очередь в результате усталостного разрушения гибкого диска. С увеличением угла перекоса полу-муфт сокращается ресурс муфты и возрастают нагрузки на концы валов и подшипники.

Упругий элемент муфты можно приближенно представить криволинейным стержнем. Напряженно-деформированное состояние такого стержня описывается известными уравнениями Кирхгофа — Клебша [1], которые в исходной векторной форме имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{P}}{ds} + \mathbf{q} = 0; \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{P} + \mathbf{m} = 0; \\ \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathfrak{D} \times \mathbf{t}; \\ \frac{d\mathfrak{D}}{ds} = [\mathbf{D}]\mathbf{M}, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{P} — вектор внутренних сил; \mathbf{q} — вектор распределенных внешних нагрузок; \mathbf{t} — орт касательной к дуге; \mathbf{m} — вектор распределенных внешних моментов; \mathbf{u} — вектор перемещений;

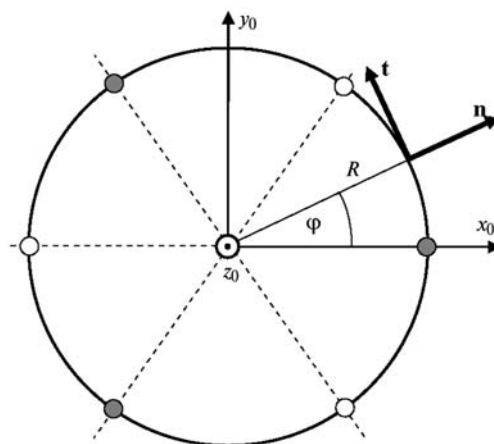


Рис. 4. Расчетная схема кольцевого упругого элемента муфты:

● — закрепленные узлы; ○ — подвижные узлы

\mathfrak{D} — вектор поворотов; \mathbf{M} — вектор внутренних моментов; $[\mathbf{D}]$ — матрица податливостей сечения; s — дуга окружности, $s = R\varphi$.

Матрица податливостей сечения равна сумме следующих произведений ортов:

$$[\mathbf{D}] = \frac{\mathbf{t}\mathbf{t}^T}{GJ_k} + \frac{\mathbf{m}\mathbf{m}^T}{EJ_x} + \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{EJ_y}, \quad (2)$$

где \mathbf{n} — нормаль к окружности (рис. 4); \mathbf{k} — орт координатной оси z_0 , направленной перпендикулярно к плоскости кольца (см. рис. 4); E, G — модули упругости 1-го и 2-го рода; J_x, J_y, J_k — осевые моменты инерции и геометрическая жесткость на кручение поперечного сечения кольца. Отметим, что используемые в формуле (2) произведения матриц-столбцов размерности 3×1 и матриц-строк размерности 1×3 дают в результате матрицы размерности 3×3 .

Для поперечного сечения кольца в виде узкого прямоугольника (рис. 5) геометрические параметры сечения определяются формулами:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; J_y = \frac{hb^3}{12}; J_k = \frac{bh^3}{3}, \quad (3)$$

где b — ширина кольца; h — толщина кольца.

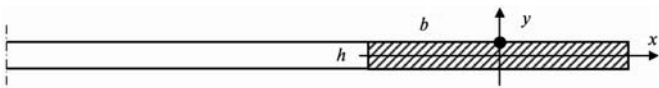


Рис. 5. Сечение кольца и расположение опасной точки в сечении

В декартовой системе координат $x_0y_0z_0$ (см. рис. 4) орты, входящие в (1) и (2), имеют вид

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Расчет кольца производился в декартовой системе координат, поэтому традиционный переход к связанным осям не потребовался.

Нагрузки на кольцо (силовые и моментные) прикладываются только в узлах. Для узла с уг-

ловой координатой $\varphi = 0$ внешние нагрузки задавались в виде

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \frac{\delta(\varphi)}{R}; \mathbf{m} = \begin{pmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} \frac{\delta(\varphi)}{R}, \quad (5)$$

где $\delta(\varphi)$ — дельта-функция Дирака; C_1, C_2, C_3 — реактивные силы в узле; C_4, C_5, C_6 — реактивные моменты в узле.

Уравнения (1) с учетом нагрузок (5) решаются в квадратурах:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -R \int_0^\varphi \mathbf{q} d\varphi = - \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{M} &= -R \int_0^\varphi (\mathbf{t} \times \mathbf{P} + \mathbf{m}) d\varphi = \\ &= R \begin{pmatrix} C_3 \sin \varphi \\ C_3 (1 - \cos \varphi) \\ -C_1 \sin \varphi - C_2 (1 - \cos \varphi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix}; \quad (6) \\ \mathfrak{D} &= R \int_0^\varphi [\mathbf{D}] \mathbf{M} d\varphi = \dots; \\ \mathbf{u} &= R \int_0^\varphi (\mathfrak{D} \times \mathbf{t}) d\varphi = \dots \end{aligned}$$

Здесь многоточием обозначены громоздкие выражения для вектора поворота \mathfrak{D} и вектора перемещений \mathbf{u} , которые были получены компьютерным анализом. Указанные выражения хотя и громоздки, но абсолютно элементарны, они состоят из тригонометрических функций углов, кратных φ , и самого угла φ . Выписывать эти выражения нет никакой необходимости, так как интегралы в выражениях (6) легко вычисляются в аналитическом виде на компьютере.

Опоры кольца, расположенные в других точках дают такое же решение как (6), но повернутое на соответствующий угол. Полное решение, учитывающее все опоры, состоит из шести уравнений, аналогичных (6):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_\Sigma &= \sum_{i=0}^5 \mathbf{P}_i H\left(\varphi - i \frac{\pi}{3}\right); \\
 \mathbf{M}_\Sigma &= \sum_{i=0}^5 \mathbf{M}_i H\left(\varphi - i \frac{\pi}{3}\right); \\
 \mathfrak{D}_\Sigma &= \sum_{i=0}^5 \mathfrak{D}_i H\left(\varphi - i \frac{\pi}{3}\right); \\
 \mathbf{u}_\Sigma &= \sum_{i=0}^5 \mathbf{u}_i H\left(\varphi - i \frac{\pi}{3}\right),
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

где Σ — индекс, обозначающий суммарное решение; H — функция Хевисайда (единичная ступенька); i — индекс, обозначающий переход от решения (6) к решению, соответствующему опоре с номером i . Для выполнения указанного перехода достаточно в формулах (6) выполнить следующие замены:

- 1) константу C_j заменить константой $C_j + 6i$;
- 2) угол φ заменить углом $\varphi - i \frac{\pi}{3}$;
- 3) все векторы \mathbf{P} , \mathbf{M} , \mathfrak{D} , \mathbf{u} повернуть вокруг оси z_0 на угол $i \frac{\pi}{3}$.

Каждое из перечисленных преобразований несложно программируется в аналитическом виде.

Полное суммарное решение (7), содержащее 36 констант, является совершенно необозримым, но не перестает при этом оставаться элементарным. Константы $C_1 \dots C_{36}$ определяют из кинематических граничных условий:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_\Sigma\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \mathbf{u}_\Sigma\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \mathbf{u}_\Sigma(2\pi) = \mathbf{0}; \\
 \mathbf{u}_\Sigma\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{Rn}\left(\frac{\pi}{3}\right); \\
 \mathbf{u}_\Sigma(\pi) &= \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{Rn}(\pi); \\
 \mathbf{u}_\Sigma\left(\frac{5\pi}{3}\right) &= \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{Rn}\left(\frac{5\pi}{3}\right); \\
 \mathfrak{D}_\Sigma\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \mathfrak{D}_\Sigma\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \mathfrak{D}_\Sigma(2\pi) = \mathbf{0}; \\
 \mathfrak{D}_\Sigma\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \mathfrak{D}_\Sigma(\pi) = \mathfrak{D}_\Sigma\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \boldsymbol{\theta},
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y, 0)^T$ — вектор поворота одной полумуфты относительно другой. Вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$, как правило, известен (кинематическое

нагружение муфты). В этом случае граничные условия (8) состоят из 12 векторных или 36 скалярных уравнений. Таким образом, условия (8) позволяют найти все 36 констант, входящих в уравнения (7). В результате суммарное решение (7), описывающее напряженно-деформированное состояние кольца, полностью известно. Для определения крутящего и изгибающего моментов достаточно спроектировать полученный вектор моментов \mathbf{M} на орты \mathbf{t} и \mathbf{n} :

$$\begin{aligned}
 M_k &= \mathbf{M}\mathbf{t}; \\
 M_{изг} &= \mathbf{M}\mathbf{n}.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Результаты расчета крутящего и изгибающего моментов представлены на рис. 6, 7.

Все приведенные на рис. 6 и 7 результаты получены в предположении, что опоры являются точечными (см. рис. 4). В действительности полумуфты передают нагрузки на кольцо

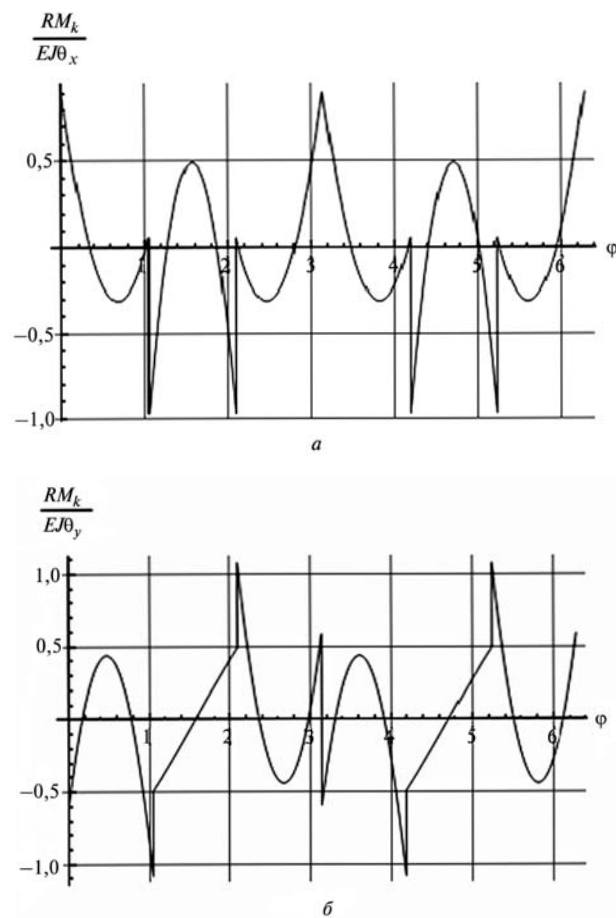


Рис. 6. Крутящие моменты, возникающие в кольце при повороте полумуфты вокруг координатных осей:

а — поворот вокруг оси x на угол θ_x ; *б* — поворот вокруг оси y на угол θ_y .

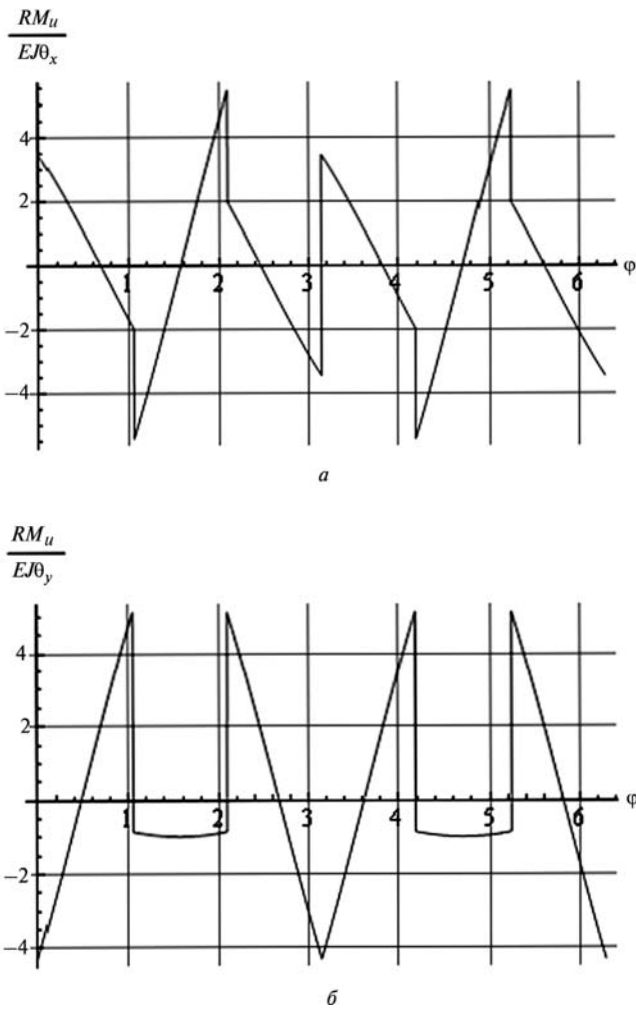


Рис. 7. Изгибающие моменты, возникающие в кольце при повороте полумуфты вокруг координатных осей:

a — поворот вокруг оси *x* на угол θ_x ; *b* — поворот вокруг оси *y* на угол θ_y .

через жесткие элементы, имеющие ненулевые размеры, и при этом размеры упругих участков между опорами оказываются меньше, чем $\pi R/3$. Относительное уменьшение размера упругих участков кольца составляет (см. рис. 2)

$$\frac{d}{\pi R/3} = \frac{3d}{\pi R} = \frac{3 \cdot 25}{\pi \cdot 130} \approx 0,184 = 18,4\%. \quad (10)$$

Уменьшение размеров упругих участков обуславливает увеличение их жесткости и, как следствие, рост внутренних моментов при фиксированных поворотах полумуфт. Точный учет этого фактора приводит к необходимости другого решения, поэтому выполним учет умень-

шения размеров упругих участков приближенно. Из строительной механики известно, что жесткость стержня при линейном смещении его краев перпендикулярно оси обратно пропорциональна третьей степени длины. Следовательно, при уменьшении длины на 18,4% поперечная изгибная жесткость возрастает в λ раз, где

$$\lambda = \left(1 + \frac{3d}{\pi R}\right)^3 = 1,184^3 = 1,66. \quad (11)$$

Полученный множитель λ можно использовать в качестве повышающего коэффициента при приближенном расчете внутренних моментов в кольце и жесткости муфты. Таким образом, изгибающие и крутящие моменты на рис. 6 и 7 должны быть дополнительно умножены на $\lambda = 1,66$.

Жесткость муфты была рассчитана статическим и энергетическим методами, что привело к одинаковым результатам. При использовании энергетического метода были заданы повороты вокруг координатных осей и по известным моментам вычислена энергия деформаций кольца

$$\begin{aligned} K_x \frac{\theta_x^2}{2} + K_{xy} \theta_x \theta_y + K_y \frac{\theta_y^2}{2} = \\ = \int_0^{2\pi} \left(\frac{M_k^2}{2GJ_k} + \frac{M_u^2}{2EJ_x} \right) R d\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

В результате были найдены следующие жесткости (без учета уменьшения длины):

$$K_x = K_y = 35,7 \frac{EJ_x}{R}; \quad (13)$$

$$K_{xy} = 0.$$

С учетом эффекта уменьшения длины свободных участков гибкого диска фактическая жесткость больше, чем по формуле (13):

$$K = \lambda \frac{35,7 EJ_x}{R} = 59 \frac{EJ_x}{R}. \quad (14)$$

В расчетах следует использовать значение, полученное по формуле (14).

Оценка циклической прочности кольца. По графикам, изображенным на рис. 6, 7, находи-

лись наибольшие значения изгибающих и крутящих моментов, которые с учетом уменьшения свободных участков составляют

$$\begin{aligned} M_{к\max} &= \frac{\lambda 1,1 EJ_x}{R} \theta = \frac{1,83 EJ_x}{R} \theta; \\ M_{и\max} &= \frac{\lambda 5,3 EJ_x}{R} \theta = \frac{8,8 EJ_x}{R} \theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Наибольшие нормальные и касательные напряжения, вызванные моментами (15) и действующие в опасной точке (см. рис. 5):

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_{к\max}}{W_k} = \frac{1,83 EJ_x}{RW_x} \theta = \\ &= \frac{1,83 Ebh^3 / 12}{Rbh^2 / 3} \theta = \frac{0,46 Eh}{R} \theta; \\ \sigma_{\max} &= \frac{M_{и\max}}{W_x} = \frac{8,8 EJ_x}{RW_x} \theta = \frac{4,4 Eh}{R} \theta. \end{aligned} \quad (16)$$

По формуле Гафа и Поларда [2] запас по циклической прочности связан с запасами по циклическому растяжению и циклическому сдвигу следующей зависимостью:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_R^2} &= \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2} = \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{-1}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{\max}}{\tau_{-1}} \right)^2 \approx \\ &\approx \left(\frac{4,4 Eh}{\sigma_{-1} R} \theta \right)^2 + \left(\frac{0,46 Eh}{(0,6 \sigma_{-1}) R} \theta \right)^2 = 19,9 \left(\frac{Eh}{\sigma_{-1} R} \theta \right)^2, \end{aligned}$$

где $n_R = 0,22 \frac{\sigma_{-1} R}{Eh\theta}$.

Для угла $\theta = 1^\circ = 0,0175$ подстановки дают следующий запас усталостной прочности:

$$n_R = 0,22 \frac{\sigma_{-1} R}{Eh\theta} = 0,22 \frac{600 \cdot 130}{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 0,0175} = 1,63.$$

С учетом того, что реальные моменты будут несколько ниже (например, из-за меньшего, чем $\lambda = 1,66$ повышения крутильной жесткости) полученный запас можно считать приемлемым. Таким образом, расчет показал, что допустимый относительный поворот полумуфта составляет примерно 1° .

Выполненный расчет является приближенным. В связи с этим запланировано дополнительное экспериментальное исследование циклической прочности упругого элемента муфты, при проведении которого будут использованы и проконтролированы полученные результаты сделанного расчета.

Литература

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций (статика). М.: Машиностроение, 1977.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. 1986.

Статья поступила в редакцию 31.05.2012