



ПАВЛОВ

Борис Изосимович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

PAVLOV

Boris Izosimovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)

Кинематический и динамический анализ пространственных рычажных механизмов с замкнутой кинематической структурой

Б.И. Павлов

Предлагаемое исследование является дальнейшим развитием матричного метода применительно к задачам кинематики и динамики многоконтурных пространственных механизмов. Рассмотрено формирование математической модели многоконтурного пространственного механизма с несколькими степенями свободы с применением матриц преобразования систем координат. Введены два вида матриц — постоянные матрицы звена и переменные матрицы кинематических пар. Приведена методология решения уравнений замкнутости, отражающих положение механизма. Разработка на базе этой методологии предлагаемого вычислительного эксперимента позволяет на этапе проектирования выбрать рациональную схему анализируемого механизма. При многократной проверке условия замыкания возникает проблема упрощения его формирования и сокращения вычислительного процесса. Эта проблема и решается выделением постоянных и переменных матриц, т.е. матричным методом.

Аналитическое описание относительного движения звеньев представлено в виде линейного преобразования между системами координат, связанных со звеньями. В механизме выделены независимые замкнутые кинематические цепи (контура). Сформированы матричные уравнения контуров, которые преобразуются в алгебраические уравнения и решаются. Динамический анализ основан на решении уравнений Лагранжа совместно с контурными уравнениями.

Матричный метод удобен благодаря общности аналитического подхода, не зависящего от частного вида механизма. Результаты решения задач анализа дают ответ на вопрос, какими свойствами обладает исследуемый механизм. Матричный метод будет полезен при исследованиях таких сложных пространственных механизмов, как подвеска автомобилей, шасси самолетов с «ломающейся ногой» и др.

Ключевые слова: кинематические пары, системы координат, матрицы преобразования, матричные уравнения, динамический анализ.

Kinematic and dynamic analyses of spatial link mechanisms with closed kinematic structure

B.I. Pavlov

The proposed study is a further development of the matrix method applied to kinematic and dynamic problems of multi-loop spatial mechanisms. A mathematical model of a multi-loop spatial mechanism with multiple degrees of freedom using coordinate system transformation matrices is formulated. Two types of matrices, that is, constant link matrices and variable matrices of kinematic pairs

are introduced. The methodology of solving closure equations describing a mechanism position is presented. Computer simulation based on the proposed methodology makes it possible to choose a rational scheme of the analyzed mechanism in the design phase. Since the closure condition is checked repeatedly, it needs to be simplified to reduce computational costs. This problem is solved by the matrix method in which constant and variable matrices are separated. An analytical description of the relative motion of links is presented using a linear transformation of the coordinate systems associated with the links. The mechanism under consideration contains independent closed kinematic chains or contours. Matrix equations of the contours are formulated and transformed into algebraic equations to be solved. The dynamic analysis of the system is based on the solution of the Lagrange and contour equations. The matrix method is efficient owing to the general analytical approach, which is independent of a particular form of the mechanism. Solving the analysis problem makes it possible to investigate the properties of the mechanism. The matrix method will be useful in studies of complex spatial designs, such as car suspension, aircraft landing gear with «leg breaking», etc.

Keywords: types of kinematic pairs, coordinate systems, transformation matrices, matrix equation, kinematic analysis, dynamic analysis.

Конструктор, приступая к проектированию механизма на основе своего опыта, задается его структурой, т. е. выбирает звенья, связи между звеньями (виды кинематических пар (КП)), размерами механизма, инерционно-жесткостными и силовыми параметрами. Эта система данных в дальнейшем служит начальным объектом проектирования, который анализируется, модифицируется, уточняется. В результате такого итерационного процесса создается рациональная конструкция. Основной задачей при проектировании методами вычислительного эксперимента является составление алгоритма формирования модели механизма.

Формализация структуры механизма. Исходим из того, что в основе рассматриваемых механизмов лежат замкнутые кинематические цепи (контур), т. е. последовательность звеньев и КП. Каждая КП образована двумя сопряженными звеньями. Устанавливаем для каждой

КП две системы координат, каждая из которых жестко связана с одним из звеньев. Относительное положение звеньев в КП характеризуется набором параметров (переменных), количество которых зависит от класса КП и обусловлено выбором систем координат (СК). Ориентацию осей выбираем следующим образом.

Для вращательной КП (рис. 1, а) начала координат обеих систем совпадают, оси Z совпадают с осью вращения и имеют одно и то же положительное направление. Параметр γ — угол между положительными направлениями осей X_j и X_k считается положительным, если измерен против часовой стрелки при рассмотрении его со стороны положительного направления оси Z_k .

Для поступательной КП (рис. 1, б) оси Z имеют одно и то же положительное направление, параллельное относительно движению (направляющей). Оси X параллельны и имеют одно и то же положительное направление. Параметр S — расстояние от оси X_j до оси X_k , считается положительным, если вектор направления совпадает с направлением оси Z_k .

Механизмы с открытыми кинематическими цепями (роботы, манипуляторы) исследованы в работах [1—8]. Однако в них рассматриваются только вращательная и поступательная КП и устанавливаются по одной системе координат.

Для винтовой и цилиндрической КП оси Z задаются как во вращательной КП, а оси X — как в поступательной КП. В винтовой КП существует связь между параметрами S и γ .

Для шарнирной КП (шарнир Гука) (рис. 1, в) направления осей Z совпадают с направлениями осей пальцев крестовины универсального шарнирного соединения. Центры систем координат совпадают с центром крестовины. Обозначим через t перпендикуляр к крестовине. Положительное направление t определяется по правилу правой руки, применяемому от положительного Z_j к положительному Z_k . Вводятся два параметра: ϕ — угол между положительным направлением оси X_j и перпендикуляром t , считается положительным, если измерен против часовой стрелки, если смотреть от положительного направления оси Z_j ; θ — угол между положительными направлениями перпендику-

ляра t и оси X_k , считается положительным, если измерен против часовой стрелки при рассмотрении его с положительного направления оси Z_k .

Для сферической КП (рис. 1, z) центры систем координат совпадают с центром сферической пары. Параметрами являются три угла Эйлера. Углы считаются положительными, если измерены против часовой стрелки при рассмотрении их, соответственно, с положительного направления оси Z_j , линии пересечения плоскостей и оси Z_k .

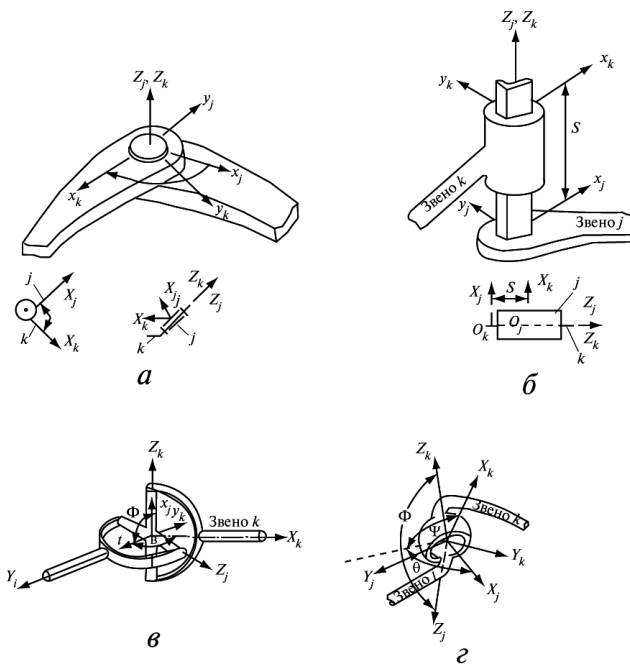


Рис. 1. Типы кинематических пар, их СК и параметры:

a — вращательная; b — поступательная; v — шарнирная; z — сферическая; $Z_{E/4}$ — ось Z системы координат КП звена 4

Выбор СК для механизма привода режущего аппарата (механизма качающейся шайбы) показан на рис. 2.

В основе формирования модели КП лежит преобразование однородных координат точки. Совокупность четырех чисел $(1, x, y, z)$ представляет собой однородные или проективные координаты точки, где (x, y, z) — декартовы координаты.

Координаты точки в i -й СК, если известны ее координаты в j -й СК, можно записать в матричном виде: $\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{r}_i \end{bmatrix} = A_{ij} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{r}_j \end{bmatrix}$, где \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j — матри-

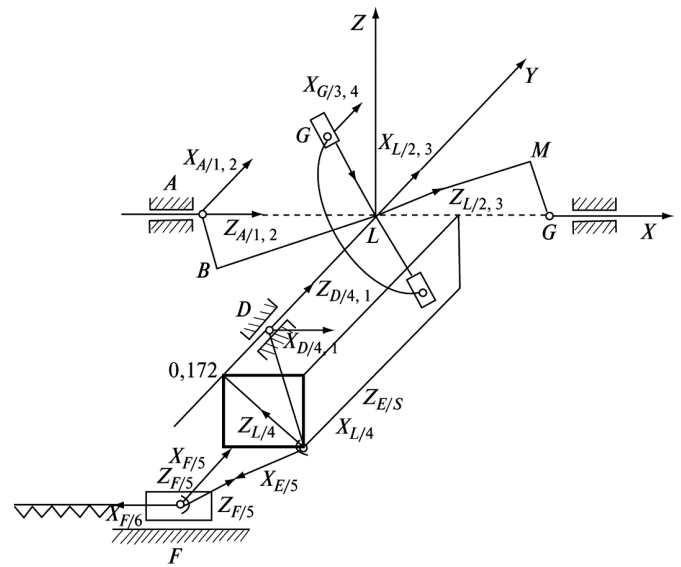


Рис. 2. Системы координат механизма привода режущего аппарата — механизма качающейся шайбы

цы-столбцы положения одной и той же точки в декартовых СК $O_i X_i Y_i Z_i$ и $O_j X_j Y_j Z_j$; A_{ij} — матрицы перехода от СК j к СК i . Матрица перехода имеет вид

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{r}_i^{O_j} & L_{ij} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{r}_i^{O_j}$ — матрица-столбец положения O_j в СК i , L_{ij} — матрица направляющих косинусов между осями СК i и j (матрица вращения). Матрица вращения является ортогональной матрицей, т. е. ее транспонированная и обратная матрица идентичны. Вектор $\mathbf{r}_i^{O_j}$ характеризует поступательное движение перехода.

Преобразование, определяемое этими уравнениями, может быть определено как ортогональное аффинное преобразование координат в 4-мерном пространстве, называемом проективным пространством.

При исследовании механизмов полагаем, что звено жесткое и его форма сохраняется неизменной, т. е. относительное расположение СК на звене постоянно. Переменным является относительное расположение звеньев КП. Исходя из этого, можно составить матрицу перехода для звена от одной СК к другой (обе системы заданы на одном звене). Такая матрица

является постоянной и характеризует «форму» звена.

Обозначим A_{ij} — матрица КП, образованная звеньями i и j ; A_i — матрица i -го звена. Матрицу КП A_{ij} будем обозначать так же и как A_C , где C — обозначение КП, образованной звеньями i и j . Если звено является звеном разветвления, то у звена несколько матриц, тогда используется обозначение A_i^k (k -я матрица i -го звена).

В качестве элементов матрицы преобразования выступают функции от параметров КП. Вид матриц преобразования координат для КП представлен в табл. 1.

Уравнение замкнутости контура. Если выполнить последовательные преобразования СК для одного замкнутого контура звеньев, начиная и кончая некоторой точкой звена, то такое преобразование является тождественным [9—12]:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{r}_0^P \end{bmatrix} = A_{01} A_1 A_{12} A_2 \dots A_{m-1,m} A_m A_{m,0} A_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{r}_0^P \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Отсюда матричное уравнение замкнутости контура приобретает следующий вид:

$$A_{01} A_1 A_{12} A_2 \dots A_{m-1,m} A_m A_{m,0} A_0 = E. \quad (2)$$

В случае многоконтурных замкнутых кинематических цепей уравнения вида (2) должны быть составлены для каждого из контуров. У таких механизмов имеются звенья, входящие в несколько контуров (звено разветвления). Естественно, что в уравнении (2) для различных контуров войдут разные матрицы преобразова-

ния звена разветвления. Решение уравнения (2) определяет положение механизма.

Анализ положения механизма [13]. Рассмотрим механизм, состоящий из одной замкнутой кинематической цепи. Введем местную, в пределах кинематической цепи, нумерацию звеньев. Пусть звенья механизма имеют номера $0, 1, \dots, n$.

Приближенное значение параметра $q_{i,i+1}$ КП, образованной i -м и $(i+1)$ -м звеньями этой цепи, обозначим $\mathbf{q}_{i,i+1}$. Уточненное значение этого параметра обозначим $\mathbf{p}_{i,i+1}$, т. е. $\mathbf{p}_{i,i+1} = \mathbf{q}_{i,i+1} + \Delta \mathbf{q}_{i,i+1}, i = \overline{1, m}$.

Решение задачи о положении сводим к нахождению $\Delta \mathbf{q}_{i,i+1}$. Это означает, что создана процедура, позволяющая, исходя из первоначальных (ориентировочных, грубых) значений, уточнить параметры и с помощью нескольких уточнений получить точное (с заданной точностью) положение механизма.

Для определения $\Delta \mathbf{q}_{i,i+1}$ рассмотрим матрицу КП при значениях параметров, соответствующих значениям $\mathbf{p}_{i,i+1}$. Разложим матрицу $A_{i,i+1}(\mathbf{p}_{i,i+1})$ в окрестности точки с координатами $\mathbf{p}_{i,i+1}$ в ряд Тейлора. Примем в качестве точки этой окрестности точку с координатой $\mathbf{q}_{i,i+1}$. Дифференцирование матрицы перехода $A_{i,j}$ КП по ее параметру $q_{i,j}$ производится при помощи матричного оператора Q : $\frac{dA_{i,j}}{dq_{i,j}} = Q_{i,j} A_{i,j} q_{i,j}$ — для однопараметрической КП

Таблица 1

Матрицы преобразования координат КП

<p>Вращательная КП</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Поступательная КП</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
<p>Шарнирная КП (шарнир Гука)</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \\ 0 & -\sin \phi & -\cos \theta & 0 \end{pmatrix}$	<p>Сферическая КП</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \phi \cos \psi + \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \psi \\ 0 & -\sin \theta \cos \psi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \cos \phi - \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \psi \\ 0 & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}$

$$\text{и } \frac{dA_{i,j}}{dq_{ij}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_{i,j}}{\partial q_{i,j}^{(k)}} q_{i,j}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 Q_{i,j}^{(k)} A_{i,j} q_{i,j}^{(k)} \text{ — для}$$

многопараметрической КП.

Для замкнутой кинематической цепи должно выполняться уравнение замкнутости контура (2):

$$A_0 A_{01}(\mathbf{p}_{01}) A_1 A_{12}(\mathbf{q}_{12} + \Delta \mathbf{q}_{12}) A_2 \dots A_n A_{n,0}(\mathbf{q}_{n,0} + \Delta \mathbf{q}_{n,0}) = E.$$

Введем обозначения:

$$B_{i,i+1} = A_0 A_{01} A_1 A_{12} \dots A_i Q_{i,i+1} A_{i,i+1} A_{i+1} \dots A_n A_{n,0};$$

$$A_0 A_{01} A_1 A_{12} \dots A_{i-1} A_{i-1,i} = A_{0i}.$$

Последовательные преобразования СК эквивалентны одному преобразованию, но с более сложной матрицей, являющейся результатом произведения всех матриц.

Раскрывая скобки и пренебрегая слагаемыми, содержащими произведения вида $\Delta q_{i,i+1} \Delta q_{j,j+1}$, т. е. учитывая только линейные члены, уравнение (3) можно представить в следующем виде:

$$B_{12} \Delta q_{12} + B_{23} \Delta q_{23} + \dots + B_{n0} \Delta q_{n0} = E - A_{0i} A_{i0} = E - A_{0n}(\mathbf{q}). \quad (3)$$

Правая часть уравнения, где матрицы A_{0n} вычислены при приближенных значениях \mathbf{q} , характеризует «невязку» уравнения в связи с неточностью этих параметров. Неизвестными в уравнении являются $\Delta q_{i,i+1}$.

В левой и правой частях уравнения (3) получают матрица 4-го порядка. Приравнивая соответственные элементы этих матриц, определяем 12 (элементы первых строк матриц приводят к тождествам, не представляющим интереса) алгебраических уравнений, содержащих параметры относительного положения звеньев. Из них три уравнения, вытекающие из компонент первого столбца матричного уравнения, характеризуют три поступательных перемещения вдоль трех осей системы $O_0 X_0 Y_0 Z_0$, а остальные девять уравнений описывают три вращательных движения. Подматрицы вращений матриц B_{ij} получаются кососимметричными. Из указанных девяти уравнений только три являются независимыми. Следовательно, из матричного уравнения замкнутости нельзя получить больше шести независимых уравнений. Если число искомых параметров оказывается меньшим,

чем число уравнений, то часть из этих уравнений может быть использована для проверки правильности решений.

Таким образом получаем систему из шести уравнений с m неизвестными (m — общее количество параметров КП, значения которых уточняются):

$$B \Delta \mathbf{q} = \mathbf{W},$$

где $\Delta \mathbf{q}$ — уточнения параметров КП.

Решение должно наилучшим образом удовлетворять среднеквадратическому критерию. Это решение имеет следующий вид:

$$\Delta \mathbf{q} = (B^T B)^{-1} B^T \mathbf{W}.$$

Полученные значения $\Delta \mathbf{q}$ служат для уточнения параметров, т. е. $\mathbf{p} = \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}$.

Процесс приближения повторяется до тех пор, пока по всем КП для любого заданного числа ϵ не будет выполнено неравенство $\max |\Delta q_{i,i+1}| \leq \epsilon$.

Для начала итерационного процесса необходимо задать начальное приближение. Оно определяется следующим образом. Строится кинематическая схема механизма при фиксированных (начальных) положениях входных звеньев. Задаются ориентации СК, связанные со звеньями в КП (см. табл. 1). Одна из неподвижных систем принимается за основную (абсолютную). Абсолютной системой может быть система, не входящая в КП, но связанная со стойкой.

При фиксированном положении механизма задание СК звеньев КП осуществляется выбором трех различных точек: центров координат $(\mathbf{r}_{oi}, \mathbf{r}_{oj})$, точек, лежащих на положительных направлениях осей $X(\mathbf{r}_{xi}, \mathbf{r}_{xj})$, и точек, лежащих на положительных направлениях осей $Z(\mathbf{r}_{zi}, \mathbf{r}_{zj})$. Координаты этих точек задаются относительно выбранной основной неподвижной СК. Этой информации достаточно, чтобы сформировать орты осей

$$(\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk}): \mathbf{e}_{xk} = (\mathbf{r}_{xk} - \mathbf{r}_{ok}) / |\mathbf{r}_{xk} - \mathbf{r}_{ok}|, \mathbf{e}_{zk} = (\mathbf{r}_{zk} - \mathbf{r}_{ok}) / |\mathbf{r}_{zk} - \mathbf{r}_{ok}|, \mathbf{e}_{yk} = \mathbf{e}_{zk} \times \mathbf{e}_{xk},$$

где $k = i, j$.

Далее формируются матрицы A_{ij} следующим образом: $A_{ij} = A_{0i}^{-1} A_{0j}$, где матрицы A_{0i} и A_{0j} соответствуют преобразованиям координат од-

ной и той же точки $\begin{bmatrix} 1 \\ r_0 \end{bmatrix} = A_{0i} \begin{bmatrix} 1 \\ r_i \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 \\ r_0 \end{bmatrix} = A_{0j} \begin{bmatrix} 1 \\ r_j \end{bmatrix}$.
 Матрица $A_{ok} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{r}_{ok} & \mathbf{e}_{xk} & \mathbf{e}_{yk} & \mathbf{e}_{zk} \end{pmatrix}$, где $k=i, j$.

Получив матрицы преобразования A_{ij} КП и поставив в соответствии с ее типом матрицу (см. рис. 1), определяют значения обобщенных параметров этой КП. Например, если звенья i и j образуют вращательную пару, то элемент a_{32} матрицы A_{ij} будет равен $a_{32} = -\sin \gamma$. Отсюда $\gamma = -\arcsin a_{32}$. Эти значения являются исходными для кинематического анализа согласно представленным выше зависимостям.

При условии, что начальные оценки достаточно близки к истинным значениям, процесс за ограниченное количество итераций будет сходиться таким образом, что матрица $A_{0n}(\mathbf{q})$ обратится в единичную матрицу. Исключением является положение в «мертвой» точке механизма. Если предположить, что процесс действительно сходится, то все величины $\Delta q_{i,i+1}$ стремятся к нулю. Если окажется, что процесс сходится к одной из матричных форм, не совпадающих с единичной матрицей, то это означает, что контур механизма замкнут неправильно. Поэтому необходимо в качестве дополнительных уравнений добавить к системе три условия на диагональные элементы. Эта система из девяти уравнений с шестью или меньшим количеством неизвестных вообще не имеет точного решения. Однако, поскольку весь метод основан на итерационном подходе, точность его не будет существенно снижена, если использовать приближенное решение системы, удовлетворяющее девяти уравнениям наилучшим образом в смысле среднеквадратичного критерия.

Кинематический анализ механизма. В основе такого анализа лежит решение задачи движения звеньев [14–19].

Анализ перемещения механизма. Последовательность анализа перемещения механизма следующая. Решается задача для текущего положения. Найденное решение принимается за начальное для последующего, которое получается перемещением ведущих звеньев на заданный шаг. Это положение становится текущим. Вновь решается задача положения; осу-

ществляется переход к следующему положению ведущих звеньев и т. д. Анализ положений проводится заданное количество раз (исходя из закона движения ведущих звеньев и шага изменения значений их параметров).

Дифференцирование переходных матриц. Элементы матрицы $A_{i,j}$ зависят от нескольких параметров (КП 4-го и 3-го класса). Полный дифференциал матрицы $A_{i,j}$ имеет вид

$$dA_{i,j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_{i,j}}{\partial q_{i,j}^{(k)}} dq_{i,j}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 Q_{i,j}^{(k)} A_{i,j} dq_{i,j}^{(k)},$$

где $q_{i,j}^{(k)}$ — k -й параметр КП, образованной звеньями i и j . Вид матриц $Q_{i,j}^{(k)}$ представлен в табл. 2. Матрицы $Q_{i,j}^{(k)}$ являются кососимметричными.

Дифференцирование матрицы перехода КП по времени выполняется также с помощью матричных операторов Q :

$$\frac{dA_{i,j}}{dt} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_{i,j}}{\partial q_{i,j}^{(k)}} \frac{dq_{i,j}^{(k)}}{dt} = \sum_{k=1}^3 Q_{i,j}^{(k)} A_{i,j} \dot{q}_{i,j}^{(k)}.$$

Дифференцирование матрицы $A_{i,j}$ КП по входному параметру q_1 , отражающему движение ведущего звена, описывается следующим образом:

$$\frac{dA_{i,j}}{dq_1} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_{i,j}}{\partial q_{i,j}^{(k)}} \frac{dq_{i,j}^{(k)}}{dq_1}.$$

Определение относительных скоростей и ускорений движения звеньев и абсолютных скоростей и ускорений движения отдельных точек. Относительные скорости и ускорения движения звеньев представляют собой соответственно первые и вторые производные от перемещений звеньев по времени. Дифференцируя 1 раз или 2 раза по времени систему (2), получим, соответственно, одну систему для определения скоростей, другую — для определения ускорений. Разумеется, первая система может иметь коэффициенты, зависящие от величин перемещений, которые следует считать известными после решения исходной системы уравнений. Аналогично коэффициенты системы линейных уравнений для определения ускорений могут содержать величины перемещений и скорости звеньев, которые следует считать известными после решения соответствующих систем уравнений.

Относительная скорость движения звеньев КП механизма рассчитывается по уравнению,

Матрицы $Q_{i,j}^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) для соответствующих КП

<p>Вращательная КП</p> $Q_{i,j}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<p>Поступательная КП</p> $Q_{i,j}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
<p>Шарнирная КП</p> $Q_{i,j}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Q_{i,j}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$	<p>Сферическая КП</p> $Q_{i,j}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Q_{i,j}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$ $Q_{i,j}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$

которое получается в результате дифференцирования по времени выражения (2):

$$B_{01}\dot{q}_{01} + B_{12}\dot{q}_{12} + \dots + B_{n0}\dot{q}_{n0} = 0. \quad (4)$$

Для каждого положения механизма осуществляется расчет матриц $B_{i,i+1}$. В результате решения будут определены значения \dot{q} за исключением тех, которые относятся к ведущим звеньям (например, можно считать \dot{q}_{01}) и являются заданными. Относящееся к ведущему звену слагаемое $B_{01}\dot{q}_{01}$ перейдет в правую часть (4).

Относительное ускорение движения звеньев КП механизма определяется путем дифференцирования выражения (4) по времени и дальнейших преобразований, в результате которых получаем

$$B_{01}\ddot{q}_{01} + B_{12}\ddot{q}_{12} + \dots + B_{n0}\ddot{q}_{n0} = \\ = [B_{01}W_{01}\dot{q}_{01} + (W_{02}B_{12}\dot{q}_{12} + B_{12}W_{20}\dot{q}_{12}) + \\ + (W_{03}B_{23} + B_{23}W_{30})\dot{q}_{23} + \dots + \\ + (W_{0n}B_{n-1,n} + B_{n-1,n}W_{n0})\dot{q}_{n-1,n} + W_{0n}B_{n0}\dot{q}_{n0}],$$

где $W_{i+1,0} = \sum_{j=j+1}^{n-1} B_{j,j+1} + B_{n0}$; $W_{0,i+1} = \sum_{j=1}^{i+1} B_{j-1,j}$.

Значения относительных скоростей звеньев КП определяются согласно уравнению (4), поэтому неизвестными являются относительные

ускорения \ddot{q}_{ij} за исключением заданных для ведущего звена КП. Данное матричное уравнение также является линейным.

Траектория точки звена. Выберем на i -м звене точку P . Определим кинематический контур, в который входит i -е звено, и последовательность звеньев, входящих в кинематическую цепь контура. Пусть X_p, Y_p, Z_p — декартовы координаты этой точки в абсолютной СК, а x_p, y_p, z_p — в СК i -го звена. Таким образом, расположение точки характеризуется двумя векторами: $R_p = (1, X_p, Y_p, Z_p)$, $r_p = (1, x_p, y_p, z_p)$. Вектор r_p может быть задан двумя способами: в СК звена i , образующего КП со звеном, предшествующим i -му ($i - 1$) в кинематической цепи (случай 1); в СК звена i , образующего КП со звеном, последующим i -му ($i + 1$) в кинематической цепи (случай 2).

Для случая 1 имеем $R_p = A_{0i}r_p^{(1)}$.

Для случая 2 имеем $R_p = A_{0i}A_i r_p^{(2)}$.

Эти уравнения можно объединить следующим образом:

$$R_p = A_{0i}z\bar{r}_p, \quad (5)$$

где $z = E$, $r_p = r_p^{(1)}$ — для случая 1; $z = A_i$, $r_p = r_p^{(2)}$ — для случая 2.

Траектория точки звена рассчитывается поэтапно и связана с перемещением звена. Совокупность положений точки и составляет ее траекторию.

Вектор абсолютной скорости точки P определяется после дифференцирования уравнения (5):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_p &= \frac{d\mathbf{R}_p}{dt} = \frac{d}{dt}(A_{0i}\mathbf{r}_p) = \frac{dA_{0i}}{dt}\mathbf{r}_p = \\ &= \frac{d}{dt}(A_0A_{01}A_1A_{12}\dots A_{i-1}A_{i-1,i})\mathbf{r}_p = \\ &= \sum_{k=1}^{i-1}(B_{k,k+1}A_{0i}\dot{q}_{k,k+1})\mathbf{r}_p. \end{aligned} \quad (6)$$

Вычислить вектор скорости точки P по этой формуле можно только в том случае, если известны величины $\dot{q}_{k,k+1}$, т. е. относительные скорости звеньев.

Если скорость точки определяется в зависимости от скорости ведущего (ведущих) звена (передаточное отношение), то в формуле (6) необходимо выполнить следующую замену:

$$\frac{dq_{k,k+1}}{dt} = \frac{dq_{k,k+1}}{dq_s} \frac{dq_s}{dt} = q'_{k,k+1} \dot{q}_s,$$

где q_s — обобщенная координата ведущего звена.

Дифференцируя (6) по времени, получаем вектор абсолютного ускорения точки:

$$\ddot{\mathbf{R}}_p = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{i-1} (B_{k,k+1}A_{0i}\dot{q}_{k,k+1})\mathbf{r}_p.$$

Для определения ускорения точки необходимо найти $q_{k,k+1}$, $\dot{q}_{k,k+1}$, $\ddot{q}_{k,k+1}$.

Решение проблемы кинематического анализа пространственных механизмов носит унифицированный характер и базируется на едином подходе к исследованию любого механизма.

Для пространственных многоконтурных механизмов задача кинематического исследования может быть выполнена только методом последовательных приближений.

Динамический анализ механизма. Для вывода уравнений движения механизма используется формула Лагранжа для всего механизма.

Для описания распределения масс i -го звена рассмотрим его частицу с массой dm и координатами (x_i, y_i, z_i) . Кинетическая энергия такой частицы $dK_i = \frac{1}{2}(\dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + \dot{Z}_i^2)dm$, где (X_i, Y_i, Z_i) — координаты этой частицы в абсо-

лютной СК. Иначе: $dK_i = \frac{1}{2}\text{Sp}(\dot{\mathbf{R}}_i\dot{\mathbf{R}}_i^T)dm$, где Sp — след матрицы; $\dot{\mathbf{R}}_i^T$ — транспонированный вектор $\dot{\mathbf{R}}_i$. Тогда

$$\begin{aligned} dK_i &= \frac{1}{2}\text{Sp}\left\{\left[\sum_{k=1}^{i-1}(B_{k,k+1}A_{0i}\dot{q}_{k,k+1})\mathbf{r}_p\right]\times\right. \\ &\quad \left.\times\left[\sum_{k=1}^{i-1}(B_{k,k+1}A_{0i}\dot{q}_{k,k+1})\mathbf{r}_p\right]^T\right\}dm. \end{aligned}$$

Отсюда

$$K_i = \frac{1}{2}\text{Sp}\left[C_i\left(\int r_i r_i^T dm\right)(C_i)^T\right]\dot{q}_s^2,$$

где $C_i = \sum_{k=1}^{i-1}(B_{k,k+1}A_{0i})\mathbf{r}_p \frac{dq_{k,k+1}}{dq_s}$.

Выражение $\int r_i r_i^T dm$ представляет собой матрицу инерции вида

$$J_i = \begin{pmatrix} \int dm & \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm \\ \int y_i dm & \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm \\ \int z_i dm & \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm \end{pmatrix}$$

Если известны масса звена (m), центр тяжести (x_i, y_i, z_i) , осевые и центробежные моменты инерции $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$, то ее можно представить в следующем виде:

$$J_i = \begin{pmatrix} m_i & m_i x_i & m_i y_i & m_i z_i \\ m_i x_i & \frac{1}{2}(-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) & I_{xy} & I_{xz} \\ m_i y_i & I_{xy} & \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) & I_{yz} \\ m_i z_i & I_{xz} & I_{yz} & \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}) \end{pmatrix}.$$

Отсюда кинетическая энергия i -го звена

$$K_i = \frac{1}{2}\text{Sp}[C_i J_i (C_i)^T]\dot{q}_s^2.$$

Путем суммирования по всем звеньям контура определяется кинетическая энергия одноконтурного механизма

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \text{Sp}[C_i J_i (C_i)^T]\dot{q}_s^2, \quad (7)$$

где n — количество звеньев в контуре.

Если механизм имеет m контуров, то уравнение (7) преобразуется к виду

$$K = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n_k} \text{Sp}[C_i J_i (C_i)^T]\dot{q}_s^2.$$

Здесь n_k — количество звеньев в k -м контуре. Если звено присутствует в нескольких конту-

рах, то оно учитывается только 1 раз. Для простоты изложения далее рассматривается одно-контурный механизм.

Потенциальная энергия механической системы состоит из двух частей: из энергии, запасенной в упругих элементах типа пружин в КП и потенциальной энергии силы тяжести, действующей на звенья.

Потенциальная энергия в пружине равняется работе, затраченной на ее деформацию:

$$P_{1i} = \frac{1}{2} c_{ij} q_{ij}^2 + \text{const.}$$

Здесь c_{ij} — жесткость пружины (сжатия для поступательного движения в КП, кручения для вращательного движения в КП); q_{ij} — отклонение пружины от недеформированного состояния.

Полная потенциальная энергия, запасенная в пружинах,

$$P_1 = \sum_{i=1}^n P_{1i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{ij} q_{ij}^2 + \text{const.}$$

Потенциальную энергию силы тяжести будем вычислять следующим образом. Введем единичный вектор $\mathbf{e} = (1, 0, 0, 0)^T$. Координаты центра тяжести \mathbf{r}_i i -го звена $\mathbf{r}_i = \mathbf{J}_i \mathbf{e} / m_i$.

Координаты центров масс в абсолютной СК $\mathbf{R}_i = A_{0,i} \mathbf{J}_i \mathbf{e} / m_i$.

Обозначим $G = (0, g_x, g_y, g_z)$ — матрица-строка составляющих ускорения силы тяжести. Потенциальная энергия силы тяжести одного i -го звена $P_{2i} = -GA_{0,i} \mathbf{J}_i \mathbf{e}$. Для всего механизма потенциальная энергия

$$P_2 = - \sum_{i=1}^n GA_{0,i} \mathbf{J}_i \mathbf{e}.$$

Функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Sp}[C_i \mathbf{J}_i (C_i)^T] \dot{q}_s^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{ij} q_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n GA_{0,i} \mathbf{J}_i \mathbf{e} + \text{const.}$$

Поскольку $\frac{dL}{dq_s} = \sum_{i=1}^n \text{Sp}(C_i \mathbf{J}_i (C_i)^T) \dot{q}_s$, то уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \text{Sp}[C_i \mathbf{J}_i (C_i)^T \dot{q}_s] - \frac{\partial}{\partial q_s} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Sp}[C_i \mathbf{J}_i (C_i)^T \dot{q}_s^2] + \frac{\partial}{\partial q_s} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{ij} q_{ij}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_s} \sum_{i=1}^n GA_{0,i} \mathbf{J}_i \mathbf{e} = \bar{P}_s.$$

Здесь P_s — обобщенная сила, которая определяется через работу, совершаемую на перемещении δq_s . Обобщенная сила P_s учитывает приложенные внешние и диссипативные силы. Обобщенная сила сопротивления F_y в фрикционных элементах p -й КП пропорциональна скорости: $F_y = -c_p \dot{q}_p = -c_p q'_{ps} \dot{q}_s$. Обобщенная внешняя сила $F_p(t)$, приложенная в p -й КП, $F_p(t) = f_p(t) q'_{ps} \dot{q}_s$, где $f_p(t)$ — внешняя сила, приложенная в КП.

Окончательное уравнение движения механизма

$$\sum_{i=1}^n \text{Sp}[C_i \mathbf{J}_i (C_i)^T \ddot{q}_s] + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\text{Sp}[C_i \mathbf{J}_i (C_i)^T \dot{q}_s^2]) - \frac{\partial}{\partial q_s} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Sp}[C_i \mathbf{J}_i (C_i)^T \dot{q}_s^2] + \frac{\partial}{\partial q_s} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{ij} q_{ij}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_s} \sum_{i=1}^n GA_{0,i} \mathbf{J}_i \mathbf{e} = - \sum_{p=1}^n c_p q'_{ps} \dot{q}_s + \sum_{p=1}^n f_p(t) q'_{ps} \dot{q}_s$$

представляет собой систему связанных нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Неявная зависимость коэффициентов от обобщенных координат заложена в матричном контурном уравнении. Это контурное уравнение решается одновременно с системой дифференциальных уравнений.

Рассматриваемые методы анализа применимы при проектировании подвесок автомобиля, которые могут быть представлены в виде пространственного механизма, имеющего ряд кинематических контуров и несколько степеней свободы. В механизме передней подвески можно выделить следующие контуры: левый и правый рычаги управления, контур дороги, левый и правый стабилизаторы, левая и правая пружины.

Реализация предлагаемого метода при проектировании дает значительную экономию машинного времени, так как на каждом шаге анализа нет необходимости пересчитывать все мат-

рицы преобразования при наличии введенных не изменяемых матриц преобразований для звена.

Литература

- [1] Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование: Идеи, методы, примеры*. Москва, Физматлит, 2002, 320 с.
- [2] Уиттекер Э.Т. *Аналитическая динамика*. Москва, УРСС, 2004, 504 с.
- [3] Самарский А.А. *Введение в численные методы*. Санкт-Петербург, Лань, 2005, 270 с.
- [4] Диментберг Ф.М. *Теория пространственных шарнирных механизмов*. Москва, Наука, 1982, 335 с.
- [5] Джолдасбеков У.А., Казыханов Х.Р., Петухов В.К. Машинный анализ кинематики механизмов. *Механика машин*, 1980, № 57, с. 46–48.
- [6] Корендясев А. И., Саламандра Б.Л., Тывес Л.И. *Теоретические основы робототехники*. В 2 кн. Кн. 1. Москва, Наука, 2006, 383 с.
- [7] Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л. *Манипуляционные роботы: Динамика и алгоритмы*. Москва, Наука, 1978, 400 с.
- [8] Hollerback J.M. A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity. *IEEE Trans. System, Man and Cybern.*, 1980, vol. SMC-10, no. 11, pp. 730–737.
- [9] Пол Р. *Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора*. Москва, Наука, 1976, 104 с.
- [10] Павлов Б.И., Очиров В.Д. *Вычислительный эксперимент в динамике машин и механизмов*. Москва, Наука, 1981, 144 с.
- [11] Крейнин Г.В. *Кинематика, динамика и точность механизмов. Справочник*. Москва, Машиностроение, 1984, 216 с.
- [12] Уикер Дж. Динамика пространственных механизмов. *Конструирование и технология машиностроения*, 1969, № 31, с. 264–278.
- [13] Sheth P.N., Hodges T.M., Uicker J.J. Matrix Analysis Method for Direct & Multiple Contact Multibody Systems. *Journal of Mechanical Design*, June 1990, vol.112, pp. 145–152.
- [14] Бидный Г.Р. *Матричный метод решения задач строительной механики*. Москва, Изд-во ЁЁ Медиа, 2012, 308 с.
- [15] Uicker J.J. *IMP [Integrated Mechanisms Program], a problem oriented Language for the Computer aided Design and Analysis of Mechanisms*. The University of Wisconsin–Madison, Wisconsin, 1972, 187 p.
- [16] Shigley J.E., Uicker J.J., Pennock G.R. *Theory of Machines and Mechanisms*. Oxford University Press, 2011, 734 p.
- [17] Бруевич Н.Г., Мардер Б.О. *Кинестатика пространственных механизмов*. Москва, Наука, 1981, 104 с.
- [18] Van Aken L., Van Brussel H. A structured geometric database in an off-line robot programming system. *Robotica*, 1987, vol. 5, no. 4, pp. 333–339.
- [19] Erdman A.G., Sandor G.N. *Mechanism Design Analysis and Synthesis*, vol. 1, Prentice Hall, 1997.

References

- [1] Samarskii A.A., Mikhailov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie: Idei, metody, primery* [Mathematical modeling: ideas, methods, examples]. Moscow, Fizmatlit publ., 2002. 320 p.

- [2] Uitteker E. T. *Analiticheskaja dinamika* [Analyticheskaya dynamics]. Moscow, URSS publ., 2004. 504 p.
- [3] Samarskii A.A. *Vvedenie v chislennye metody* [Introduction to Numerical Methods]. St. Petersburg, Lan' publ., 2005. 270 p.
- [4] Dimentberg F.M. *Teoriia prostranstvennykh sharnirnykh mekhanizmov* [Theory of spatial linkages]. Moscow, Nauka publ., 1982. 335 p.
- [5] Dzholdasbekov U.A., Kazykhanov Kh.R., Petukhov V.K. Mashinnyi analiz kinematiki mekhanizmov [Computer analysis of the kinematics of mechanisms]. *Mekhanika mashin* [Mechanics of Machines]. 1980, no. 57, pp. 46–48.
- [6] Korendiashev A. I., Salamandra B.L., Tyves L.I. *Teoreticheskie osnovy robototekhniki. V 2 kn. Kn. 1* [Theoretical foundations of robotics. In the book of 2 books 1]. Moscow, Nauka publ., 2006. 383 p.
- [7] Popov E.P., Vereshchagin A.F., Zenkevich S.L. *Manipulatsionnye roboty: Dinamika i algoritmy* [Manipulation Robots: Dynamics and algorithms]. Moscow, Nauka publ., 1978. 400 p.
- [8] Hollerback J.M. A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1980, vol. SMC-10, no. 11, pp. 730–737.
- [9] Pol R. *Modelirovanie, planirovanie traektorii i upravlenie dvizheniem robota-manipulirovannogo* [Modeling, path planning and motion control a robotic arm]. Moscow, Nauka publ., 1976. 104 p.
- [10] Pavlov B.I., Ochirov V.D. *Vychislitel'nyi eksperiment v dinamike mashin i mekhanizmov* [Computer experiment in the dynamics of machines and mechanisms]. Moscow, Nauka publ., 1981. 144 p.
- [11] Kreinin G.V. *Kinematika, dinamika i tochnost' mekhanizmov. Spravochnik* [Kinematics, dynamics and precision mechanisms. Handbook]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1984. 216 p.
- [12] Uicker J.J. *Dinamika prostranstvennykh mekhanizmov* [Dynamics of spatial mechanisms]. *Konstruirovaniye i tekhnologiya mashinostroeniya* [Designing and manufacturing engineering]. 1969, no. 31, pp. 264–278.
- [13] Sheth P.N., Hodges T.M., Uicker J.J. Matrix Analysis Method for Direct & Multiple Contact Multibody Systems. *Journal of Mechanical Design*, June 1990, vol.112, pp. 145–152.
- [14] Bidnyi G.R. *Matrichnyi metod resheniya zadach stroitel'noi mekhaniki* [Matrix method for solving problems of structural mechanics]. Moscow, EE Media publ., 2012. 308 p.
- [15] Uicker J.J. *IMP [Integrated Mechanisms Program], a problem oriented Language for the Computer aided Design and Analysis of Mechanisms*. The University of Wisconsin–Madison, Wisconsin, 1972. 187 p.
- [16] Shigley J.E., Uicker J.J., Pennock G.R. *Theory of Machines and Mechanisms*. Oxford University Press, 2011. 734 p.
- [17] Bruevich N.G., Marder B.O. *Kinetostatika prostranstvennykh mekhanizmov* [Kinestatics spatial mechanisms]. Moscow, Nauka publ., 1981. 104 p.
- [18] Van Aken L., Van Brussel H. A structured geometric database in an off-line robot programming system. *Robotica*, 1987, vol. 5, no. 4, pp. 333–339.
- [19] Erdman A.G., Sandor G.N. *Mechanism Design Analysis and Synthesis*, vol. 1, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1997.

Статья поступила в редакцию 28.08.2013

Информация об авторе

ПАВЛОВ Борис Изосимович (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: b_i_pavlov@mail.ru).

Information about the author

PAVLOV Boris Izosimovich (Moscow) — Dr. Sci. (Eng.), Professor of «Theory of Mechanisms and Machines» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: b_i_pavlov@mail.ru).