



**БУЛАНОВ**  
Владимир Борисович  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**BULANOV**  
Vladimir Borisovich  
(Moscow, Russian Federation,  
Bauman Moscow State  
Technical University)



**СЕМЕНОВ-ЕЖОВ**  
Игорь Евгеньевич  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**SEMENOV-EZHOV**  
Igor' Evgen'evich  
(Moscow, Russian Federation,  
Bauman Moscow State  
Technical University)



**ШИРШОВ**  
Анатолий Артемович  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**SHIRSHOV**  
Anatoliy Artemovich  
(Moscow, Russian Federation,  
Bauman Moscow State  
Technical University)

## Предельное состояние сжато-растянутого гибкого стержня

**В.Б. Буланов, И.Е. Семенов-Ежов, А.А. Ширшов**

*Одна из важнейших задач проектирования — снижение массы конструкции без ущерба для ее работоспособности. Как правило, на стадии проектирования расчеты ведутся на максимальные штатные нагрузки, ожидаемые за срок службы изделия. Однако во время эксплуатации возможны нагрузки, превышающие штатные (например вследствие землетрясения). Расчеты по предельному состоянию на такие виды нагрузки позволяют предотвратить катастрофические разрушения и в то же время получить более экономичную конструкцию. Рассмотрена задача определения предельной нагрузки для сжато-растянутого стержня. Для гибкого сжатого стержня предельной является нагрузка, приводящая к потере устойчивости. При неподвижном закреплении обоих торцов стержня он превращается в сжато-растянутый статически неопределимый стержень. Проанализирован стержень постоянного поперечного сечения из идеального упругопластического материала, нагруженный продольной силой в пролете. Упругое состояние рассмотрено в постановке Эйлера. Показано, что в зависимости от приложения продольной силы предельная нагрузка определяются либо упругим решением, либо приближенным упругопластическим, либо решением для короткого стержня по предельному состоянию.*

**Ключевые слова:** предельное состояние, сжато-растянутый стержень, устойчивость, предельная нагрузка.

## The limit state of a compressed-stretched flexible rod

**V.B. Bulanov, I.E. Semenov-Ezhov, A.A. Shirshov**

*One of the most important design problems is reducing the weight of a structure without performance degradation. As a rule, calculations at the design stage are performed for the maximum load expected during the life cycle of the product. However, the loads over the operation time may exceed design values (e.g., because of the earthquake). In this case, the limit state design can prevent catastrophic failure and, at the same time, provide a more efficient construction. The problem of determining the maximum load for a compressed-stretched rod is considered. The limit load applied to a flexible compressed straight rod causes its buckling. When both ends of the rod are fixed, it becomes a compressed-stretched statically indeterminate rod. This paper deals with a uniform rod of constant cross-section made of an ideal elastic-plastic material under a longitudinal force. The Euler formulation of an elastic state is involved. It is shown that, depending on the applied longitudinal force, the limit load is determined by an elastic or approximate elastoplastic solution, or by a limit state solution for a short rod.*

**Keywords:** limit state, compressed-stretched rod, stability, buckling, load limit.

Под предельным состоянием понимают потерю конструкцией несущей способности [1]. Расчеты по предельному состоянию по сравнению с расчетами по допускаемым напряжениям характеризуются существенным преимуществом, поскольку, позволяют более полно выявить работоспособность конструкции.

Цель настоящей работы — определение нагрузки, при которой закрепленный по торцам статически неопределимый стержень постоянного сечения, нагруженный продольной силой в пролете, теряет несущую способность. Принимаем, что материал стержня идеально упругопластический.

Потеря несущей способности может произойти по трем различным схемам:

схема 1 — стержень теряет устойчивость при напряжениях ниже предела текучести  $\sigma_T$ . В этом случае предельная сила  $F_{пр1}$  равна критической силе  $F_{кр}$ . В зависимости от отношения сжатой части ( $l_0$ ) к полной длине стержня ( $l$ )  $l_0/l$  при некоторой нагрузке  $F^*$  напряжения достигнут предела текучести либо в сжатой части стержня (схема 2), либо в растянутой части (схема 3);

схема 2 — в силу принятой модели материала вопрос о потере устойчивости не рассматриваем, поскольку, как показано в работе [2], схематизация диаграммы сжатия кусочно-линейной функцией приводит к противоречивым результатам. При  $|\sigma| = \sigma_T$  в сжатой части деформации неограниченно возрастают. Это обуславливает появление пластических деформаций в растянутой части, т. е. наступление предельного состояния. Следовательно,  $F_{пр2} = 2\sigma_T A$  ( $A$  — площадь поперечного сечения стержня);

схема 3 — возможно появление пластических деформаций в растянутой части и потеря устойчивости сжатой части стержня, т. е.  $F_{пр3} < 2\sigma_T A$ .

Потеря несущей способности по схемам 1 и 2 представляет собой два физически различных процесса, характеризуемых одинаковыми зависимостями перемещения от силы  $F(w)$  [1, 3] (рис. 1). Зависимость  $F(w)$  для стержня, потерявшего устойчивость представлена на рис. 1, а, а для стержня в предельном состоянии при растяжении или сжатии — на рис. 1, б.

Рассмотрим стержень, неподвижно закрепленный в шарнирных опорах (рис. 2, а) и на-

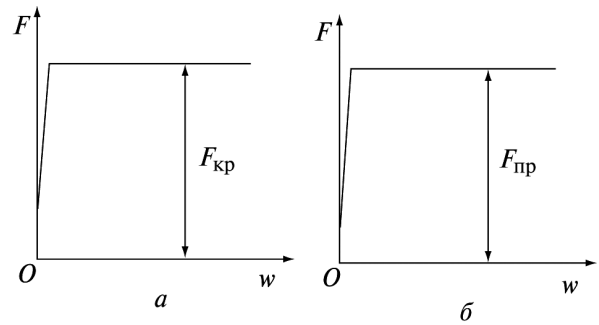


Рис. 1. Зависимость перемещения от силы  $F(w)$ : а — потеря устойчивости; б — предельное состояние короткого стержня

груженный силой  $F$  в пролете. Его деформированное состояние показано на рис. 2, б.

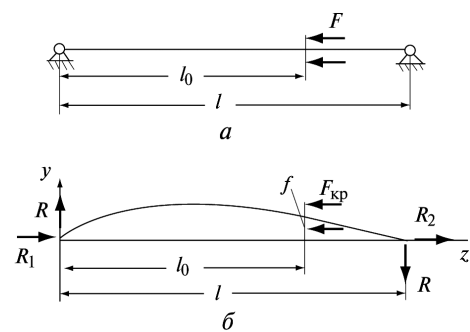


Рис. 2. Расчетная схема стержня:

а — условия нагружения и закрепления; б — деформированное состояние

Установим пределы применения потери несущей способности по схеме 1. Из условий равновесия деформированного стержня следует, что  $Rl = F_{кр} f$ . До потери устойчивости реакция левой опоры  $R_1 = F_{кр} (l - l_0) / l$ . Поскольку отклонения от прямолинейной формы можно считать малыми, то при потере устойчивости сжимающую силу  $R_1$  можно принять равной  $F_{кр} (l - l_0) / l$  [3, 4]. Обозначив отношение  $l_0 / l = \eta$ , получим  $R_1 = (1 - \eta)F$ .

Из условий равновесия сжатой и растянутой частей стержня в деформированном состоянии имеем два дифференциальных уравнения:

$$v_1'' + (1 - \eta)k^2 v_1 = k^2 r z \text{ при } z < l_0;$$

$$v_2'' - \eta k^2 v_2 = k^2 (r z - f) \text{ при } z > l_0,$$

где  $k^2 = F_{кр} / EI_{\min}$ ;  $r = R / F_{кр} = f / l$ ;  $f$  — прогиб стойки в сечении приложения силы  $F_{кр}$ .

Решения дифференциальных уравнений имеют следующий вид:

• для сжатой части

$$v_1 = C_1 \sin(\sqrt{1-\eta}kz) + C_2 \cos(\sqrt{1-\eta}kz) + f \frac{z}{(1-\eta)l}; \quad (1)$$

• для растянутой части

$$v_2 = C_3 \operatorname{sh}(\sqrt{\eta}kz) + C_4 \operatorname{ch}(\sqrt{\eta}kz) + f \frac{z-l}{\eta l}. \quad (2)$$

Постоянные интегрирования  $C_1-C_4$ , а также прогиб  $f$  определяются из граничных условий и условий непрерывности перемещений на границе участков:

- при  $z = 0$   $v_1 = 0$ ;
- при  $z = l_0$   $v_1 = f, v_2 = f, v'_1 = v'_2$ ;
- при  $z = l$   $v_2 = 0$ .

Из условия  $v_1(0) = 0$  следует, что  $C_2 = 0$ . Оставшиеся условия приводят к однородной системе из четырех уравнений с неизвестными  $C_1, C_3, C_4$  и  $f$ , ненулевое решение которой получают, приравняв нулю определитель:

$$D(kl, \eta) = \begin{vmatrix} \sin(kl\sqrt{1-\eta}) & 0 & 0 & \frac{2\eta-1}{1-\eta} \\ 0 & \operatorname{sh}(kl\sqrt{\eta}) & \operatorname{ch}(kl\sqrt{\eta}) & \frac{1-2\eta}{\eta} \\ kl\sqrt{1-\eta} \cos(kl\sqrt{1-\eta}) & -kl\sqrt{\eta} \operatorname{ch}(kl\sqrt{\eta}) & -kl\sqrt{\eta} & \frac{1}{(1-\eta)\eta} \\ 0 & \operatorname{sh}(kl\sqrt{\eta}) & \operatorname{ch}(kl\sqrt{\eta}) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Из уравнения  $D(kl, \eta) = 0$  берем меньшее, отличное от нуля, значение параметра  $kl$ , по которому определяем критическую, предельную, силу:

$$F_{\text{нр1}} = F_{\text{кр}} = (kl)^2 EI_{\text{min}} / l^2. \quad (3)$$

Зависимости параметра  $kl$  от  $\eta$  представлены на рис. 3. Критическая сила в стойке с неподвижными опорами имеет минимальное значение при  $\eta = 0,40$ . Сравнение кривых показывает, что закрепление верхней опоры увеличивает критическую силу более чем в 4 раза. В частном случае, рассмотренном в работе [6], при  $\eta = 0,5$  растянутая часть стержня остается прямой ( $C_3 = C_4 = 0$ ), но при  $\eta \neq 0,5$  она слегка искривлена, поскольку константы  $C_3$  и  $C_4 \neq 0$ .

Полученное решение справедливо для  $R_2 < \sigma_T A$  и  $R_1 < \sigma_T A$ . Как было сказано выше, растягивающая сила  $R_2 = \eta F$ , сжимающая  $R_1 = (1-\eta)F$ ,  $F = (kl)^2 EI_{\text{min}} / l^2$ . Используя эти со-

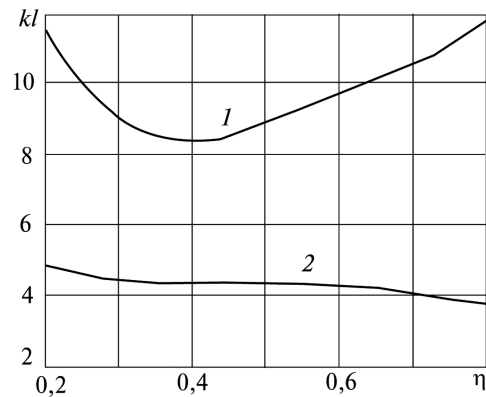


Рис. 3. Зависимость параметра  $kl$  от отношения  $l_0 / l$ :  
1 — две неподвижных опоры; 2 — одна неподвижная опора [3, 5]

отношения определим связь между безразмерной длиной стержня  $\lambda$ , характеризующей гибкость стойки, параметром  $kl$  и характеристиками материала и стержня:

$$\lambda > \max(kl\sqrt{\eta E / \sigma_T}; kl\sqrt{(1-\eta)E / \sigma_T}), \quad (4)$$

где  $\lambda = l/i_{\text{min}}$ ,  $i_{\text{min}}$  — радиус инерции поперечного сечения,  $i_{\text{min}} = \sqrt{I_{\text{min}} / A}$ .

В аксонометрии вид поверхности  $\lambda(\eta, \sigma_T)$ , разделяющей две области при  $E = 200$  ГПа, показан на рис. 4. Выше этой поверхности расположены точки, соответствующие относительной длине стержня  $\lambda$ , у которого  $F_{\text{нр1}} = F_{\text{кр}}$ .

Уравнение разделяющей поверхности имеет вид

$$\lambda_1 = kl(\eta)\sqrt{(1-\eta)E / \sigma_T} \quad \text{при } \eta \leq 0,5;$$

$$\lambda_1 = kl(\eta)\sqrt{\eta E / \sigma_T} \quad \text{при } \eta \geq 0,5.$$

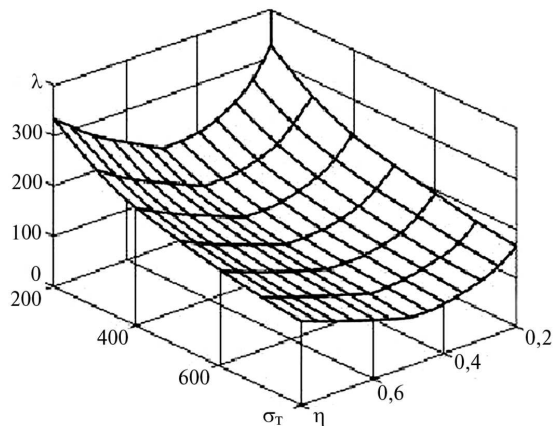


Рис. 4. Вид разделяющей поверхности  $\lambda(\eta, \sigma_T)$

Рассмотрим схему 3. В растянутой части стержня нормальная сила  $N = \sigma_r A = \text{const}$ . Согласно модели идеального упругопластического тела при  $|\sigma| = \sigma_r$  деформации, и как следствие удлинение стержня, не определены. При возрастании нагрузки удлинение растянутой части приводит к потере устойчивости сжатой части стержня. В работе [1] показано, что стержень прямоугольного сечения при  $N = \sigma_r A$  может изгибаться при отсутствии изгибающего момента. Принимаем, что изгибающий момент в растянутой части стержня с поперечным сечением любой формы равен нулю. Тогда сжатую часть стержня можно рассматривать как шарнирно закрепленный стержень длиной  $l_0$ , нагруженный силой  $R_1 = F - \sigma_r A = \pi^2 EI_{\min} / (\eta l)^2$ , т. е. предельная нагрузка

$$F_{\text{пр3}} = \sigma_r A + \pi^2 EI_{\min} / (\eta l)^2. \quad (5)$$

Данное приближенное решение справедливо для  $F_{\text{пр2}} < 2\sigma_r A$ . После подстановки в неравенство (4) выражения (5) получаем значение относительной длины  $\lambda_2 = \pi / \eta \sqrt{E / \sigma_r}$ , больше которого справедливо выражение (5). Если  $\lambda < \lambda_2$ , то  $F_{\text{пр3}} = 2\sigma_r A$ .

Отметим, что приближенное решение (5) дает заниженное значение для предельной нагрузки при  $\lambda = \lambda_2$ . Определение  $\lambda_2$  из условия равенства  $F_{\text{пр1}}$  и  $F_{\text{пр3}}$  приводит к увеличению значения  $\lambda_2$ . Использование нижней оценки для  $F_{\text{пр3}}$  по мнению авторов данной статьи предпочтительнее, так как при этом увеличивается коэффициент запаса по предельному состоянию.

## Выводы

1. Показано, что неподвижное закрепление обеих опор приводит к повышению критической силы более чем в 4 раза.
2. Установлены границы применимости упругого, упругопластического и пластического решений.

## Литература

- [1] Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. Москва, Машиностроение, 1975, 399 с.
- [2] Алфутов Н.А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем*. Москва, Машиностроение, 1991, 334 с.
- [3] Пановко Я.Г., Губанова И.И. *Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки*. Москва, Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1987, 352 с.
- [4] Koiter W.T. Elastic stability. *Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung*, 1985, no. 9, pp. 205–210.
- [5] Гайджуков П.П. *Расчет стержневых систем на устойчивость и колебания*. Новочеркасск, Юж.-Рос. гос. техн. ун-т, 2009, 195 с.
- [6] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. Москва, Наука, Физматлит, 1996, 368 с.

## References

- [1] Malinin N.N. *Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti* [Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1975. 399 p.
- [2] Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoichivost' uprugikh system* [Basis of calculation for the stability of elastic systems]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1991. 334 p.
- [3] Panovko Ia.G., Gubanova I.I. *Ustoichivost' i kolebaniia uprugikh sistem: Sovremennye kontseptsii, paradoksy i oshibki* [Stability and oscillations of elastic systems: Modern concepts, paradoxes and errors]. Moscow, Nauka publ., 1987. 352 p.
- [4] Koiter W.T. Elastic stability. *Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung*, 1985, no. 9, pp. 205–210.
- [5] Gaidzhurov P.P. *Raschet stержnevyykh sistem na ustoichivost' i kolebaniia* [Calculation of core systems on stability and vibration]. Novocherkassk, SRSTU publ., 2009. 195 p.
- [6] Feodos'ev V.I. *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniiu materialov* [Selected problems and questions in strength of materials]. Moscow, Nauka publ., Fizmatlit, 1996. 368 p.

Статья поступила в редакцию 20.06.2013

## Информация об авторах

**БУЛАНОВ Владимир Борисович** (Москва) — доцент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**СЕМЕНОВ-ЕЖОВ Игорь Евгеньевич** (Москва) — доцент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**ШИРШОВ Анатолий Артемович** (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: chirchvaa@mail.ru).

## Information about the authors

**BULANOV Vladimir Borisovich** (Moscow) — Associate Professor of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation).

**SEMENOV-EZHOV Igor' Evgen'evich** (Moscow) — Associate Professor of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation).

**SHIRSHOV Anatoliy Artemovich** (Moscow) — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: chirchvaa@mail.ru).