



**ПОЖБЕЛКО**  
Владимир Иванович  
(Южно-Уральский  
государственный университет)

**POZHBELKO**  
Vladimir Ivanovich  
(Chelyabinsk, Russian  
Federation, South Ural State  
University)

## **Универсальная теория структуры, общие свойства и алгоритмы направленного синтеза и анализа статически определимых механических систем.**

### **Часть 1. Оптимальная структура механизмов и ферм**

**В.И. Пожбелко**

*Структурный синтез и анализ являются первичными и наиболее ответственными этапами конструирования механизмов и машин, определяющими эффективность работы и долговечность всей конструкции. Синтез, особенно механизмов, представляет собой очень сложную задачу, которая обычно имеет многовариантное решение и поэтому относится к одной из наиболее трудных в теории механизмов и механике машин. Разработанная автором универсальная теория структуры содержит выявленные общие закономерности рационального строения многозвенных механических систем, а также единые структурные формулы и методы направленного синтеза плоских и пространственных механизмов и ферм оптимальной структуры, что позволяет успешно решать различные задачи конструирования надежно работающих механизмов и приводов машин в разных областях машиностроения (роботы-манипуляторы, станки-автоматы, обрабатывающие центры, прессовое оборудование и др.). Примеры применения данной универсальной теории для создания многозвенных механических систем оптимальной структуры в разных областях техники представлены в части 2 (Известия высших учебных заведений. Машиностроение, № 2, 2014).*

**Ключевые слова:** структурный синтез, плоские и пространственные системы механизмов, ферм и роботов.

## **Universal theory of structures, general properties and algorithms for the directed synthesis and analysis of statically determinate mechanical systems. Part 1. Optimal structure of mechanisms and trusses**

**V.I. Pozhbelko**

*Structural synthesis and analysis are the primary and most important stages of designing machines and mechanisms that determine the efficiency and durability of the entire structure. The synthesis, especially of mechanisms, is a very complex problem, which usually has a multivariate solution and, therefore,*

*belongs to one of the most difficult problems in the theory of mechanisms and mechanics of machines. A universal theory of structures developed by the author contains general principles of rational construction of multilink mechanical systems, as well as common structural formulas and methods of the directed synthesis of optimal planar and spatial mechanisms and trusses. It allows us to successfully design reliable mechanisms and machine drives in various fields of mechanical engineering (robot manipulators, automated machines, workcenters, forging equipment, etc.). The examples of the application of the universal theory to the development of optimal multilink mechanical systems in various fields of technology will be presented in Part 2.*

**Keywords:** structural synthesis, planar and spatial systems of mechanisms, trusses and robots.

**Постановка задачи и предлагаемый путь ее решения.** Многолетней практикой конструирования [1] установлено, что наиболее перспективными в современном машиностроении и различных областях техники являются *статически определимые механические системы*, которые обладают свойством *самоустанавливаемости звеньев*, что снижает их нагруженность при температурных и силовых деформациях, а также при погрешностях изготовления и сборки. Эти системы отличаются уменьшенным трением и износом, более равномерным распределением нагрузок и увеличенным в несколько раз сроком службы [2–10]. Именно статически определимые механизмы и фермы являются *оптимальными структурами* [11–20], так как имеют правильное строение [3, 21–23] с «нормальным» [24] соотношением между числом звеньев, числом связей и числом степеней подвижности, а их создание и представляет собой согласно работе [3] *оптимальный структурный синтез*.

Структурный синтез и анализ [1] — первые и наиболее ответственные этапы создания надежно работающих механических систем различного назначения (приводы машин, фермы, роботы, манипуляторы) по критерию отсутствия в них избыточных связей (получаются статически определимые системы). Основная исходная отличительная характеристика различ-

ных механических систем — число их степеней свободы  $W$  (DOF [15]) после сборки:  $W = 0$  — фермы;  $W = 1$ ,  $W = 2$ ,  $W = 3$  — соответственно 1-, 2- и 3-подвижные механизмы. Аналитическая зависимость между числом  $W$  и структурными параметрами проектируемой системы в виде структурной формулы подвижности является *обязательным* компонентом любого структурного анализа и синтеза [14, 15, 24], а степень охвата ею всего возможного многообразия строения многозвенных систем с заданным числом  $W$  и определяет результативность данной процедуры.

В теории механизмов и механике машин при структурном анализе и синтезе многозвенных механизмов для определения числа их степеней свободы (DOF [15]) с 1869 г. применяются структурная формула одноподвижных механизмов П.Л. Чебышева [3, 22–24] и тождественные ей критерии А. Клейна [14] и М. Грюблера [15]. Однако они не отражают всех структурных особенностей плоских и пространственных многозвенных статически определимых кинематических цепей и не содержат информации о требуемом выполнении отдельных звеньев статически определимых систем. Поэтому структурный синтез перспективных самоустанавливающихся механизмов является неопределенным и непредсказуемым.

Рассмотрим возможности устранения указанных недостатков, препятствующих разработке рациональных алгоритмов структурного анализа и синтеза различных механических систем, за счет применения предложенной автором в разных равнозначных вариантах [5, 6, 10] новой структурной формулы подвижности для решения прикладных задач механики. В связи с этим на основе структурных математических моделей [5, 10–12] предлагается перейти к более наглядному геометрическому и топологическому представлению механической системы — в виде расчетного конечного набора (assortment) одно- и многовершинных (многошарнирных) звеньев и многократных шарниров, гарантированно образующих (после их сборки между собой) статически определимую многозвенную систему заданной подвижности (DOF), содержащую «заданное число

независимых замкнутых контуров  $K$ , требуемый набор многократных шарниров и требуемый состав многовершинных звеньев с заданным ограничением их наибольшей сложности (например, по числу осей шарниров на одном звене) в пределах допустимого их общего числа в проектируемой механической системе» [11].

Согласно фундаментальному словарю по механике (искусству построения) машин [1] и справочнику конструктора [16] наиболее востребованными и перспективными для разных областей техники являются системы с многократными шарнирами, применение которых в проектируемой структуре [11, 12] обеспечивает упрощение конструкции, снижение габаритов и веса приводов, а также расширение их функциональных возможностей. В связи с этим возникает актуальная задача «*направленного структурного синтеза оптимальных механических систем с многократными шарнирами*» [10], которая ставится и полностью решается в данной работе.

**Общие структурные формулы и математические модели строения статически определимых механических систем.** *Вершина звена* — сопрягаемый элемент звена, место на одном звене механической системы, конструктивно подготовленное для подвижного присоединения к нему другого звена системы посредством кинематических пар, гибких и динамических связей [8].

Условные обозначения:

$n_1$  — число 1-вершинных (1-шарнирных) звеньев;  $n_2$  — число 2-вершинных (2-шарнирных) звеньев;  $n_3$  — число 3-вершинных (3-шарнирных) звеньев;  $n_4$  — число 4-вершинных (4-шарнирных) звеньев;  $n_5$  — число 5-вершинных (5-шарнирных) звеньев; ...;  $n_i$  — число наиболее сложных  $i$ -вершинных звеньев (с учетом всех видов кинематических пар, гибких и динамических связей);  $i_{\max} = K + W$  — предельное число соединений наиболее сложного звена с другими звеньями (теорема II);

$K$  — число образуемых звеньями данной системы взаимно независимых замкнутых контуров;

$v$  — *приведенное число* многократных шарниров, учитывающее число всех двойных шарни-

ров ( $v_2$ ), тройных ( $v_3$ ) и т. д.  $j$ -кратных шарниров [8] (теорема IV).

Представленные на основе общей структурной теории [6—12] универсальные аналитические зависимости отражают особенности возможного строения открытых ( $K = 0$ ) и замкнутых ( $K \geq 1$ ) статически определимых механических систем разного уровня сложности ( $Y = K - 1 \geq -1$ ): неоднородных ( $h = \text{var}$ ) и однородных ( $h = 1 \dots 6 = \text{const}$ ); одно- и многоподвижных; плоских и пространственных механизмов и ферм. Выполненная формализация структуры и методика *направленного структурного синтеза и анализа* строения многозвенных механических систем заключается в их топологическом представлении в виде заданной совокупности  $K$  замкнутых контуров, составленных из строго определенных расчетных наборов (assortments) взаимосвязанных одно- и многошарнирных звеньев ( $n_1, n_2, \dots, n_{K+W}$ ), замыкаемых между собой посредством однократных и многократных шарниров и различных геометрических, гибких и динамических связей.

1. *Классификация замкнутых контуров и семейств механических систем* — в качестве первоочередной оценочной количественной характеристики строения замкнутых контуров многозвенных механических систем примем безразмерное целое число  $h$ , изменяющееся в интервале значений

$$h \geq (H + 1) - (g + d) = 1 \dots 6 \quad (1)$$

и равное количеству элементарных (вращательных, поступательных) перемещений звеньев, необходимых для полного замыкания в процессе сборки данного открытого контура в его последней кинематической паре. В зависимости (1) слагаемое  $H = 1 \dots 5$  учитывает возможную подвижность кинематических пар (геометрических связей), а слагаемое  $(g + d) = 1$  — возможное замыкание данного контура гибкими ( $g \neq 0$ ) или динамическими связями ( $d \neq 0$ ) [6, 17].

С физической точки зрения величина  $1 \leq h \leq 6$  представляет собой число степеней свободы того пространства, в пределах которого могут происходить перемещения звеньев данной механической системы (т. е. пространства движений, в котором существует и работает данный

механизм или пространства, в котором происходят деформации звеньев данной фермы).

По значению безразмерного целого числа  $h = 1 \dots 6$  разделим замкнутые контуры на шесть классов: I —  $h = 1$ , II —  $h = 2$ , III —  $h = 3$ , IV —  $h = 4$ , V —  $h = 5$  и VI —  $h = 6$ , а однородные механические системы I типа (содержащие замкнутые контуры одного класса) — разделим соответственно на шесть семейств (номер семейства равен числу  $h$ ). Неоднородные механические системы II типа (содержащие замкнутые контуры разных классов) — объединим в особое седьмое семейство и условно обозначим его  $h_0 = 7$ .

В данной работе в диапазоне  $2 \leq h \leq 6$  существование различных механических систем рассматривается (см. далее) в предлагаемой новой области — *многократном подвижном пространстве*, где вдоль хотя бы одной из осей координат  $x, y, z$  в процессе сборки и работы происходит два и более *повторяющихся* элементарных перемещений звеньев, реализующих заданное безразмерное число  $h = 2 \dots 6$  (в отличие от традиционно рассматриваемого пространства неповторяющихся движений [3, 15, 20]).

2. *Универсальная структурная формула (уравнение подвижности DOF)* статически определимых неоднородных (2а) и однородных (2б) механических систем с любыми видами связей [6, 8] имеет вид

$$W = (\tilde{n} - 1) - \sum_{h=1}^{h=6} (h-1)K_h + f; \quad (2a)$$

$$W = (\tilde{n} - 1) - (h-1)K + f \quad (2б)$$

и устанавливает следующую *общую* зависимость подвижности  $W$  от величины  $h$  (пространства, в котором существует данная механическая система) и применяемых в структуре наборов многошарнирных звеньев и многократных шарниров:

$$W = \left(\frac{h+1}{2}\right)n_1 + n_2 - \left\{ \left(\frac{h-3}{2}\right)n_3 + (h-2)n_4 + \dots + \left[ \left(\frac{h-1}{2}\right)(i) - h \right] n_i \right\} + (f - v - h). \quad (2в)$$

Зависимость (2в) в виде суммы имеет более краткую равнозначную форму записи:

$$W = \sum_{i=1}^{K+W} \left[ h - \left(\frac{h-1}{2}\right)(i) \right] + n_i (f - v - h). \quad (2г)$$

В структурных формулах (2а)–(2г)  $f$  — число *дополнительных* степеней свободы механической системы от применения в ней вместо низших пар высших, например, 2-подвижных (с числом  $p_2$ ), 3-подвижных (с числом  $p_3$ ), 4-подвижных (с числом  $p_4$ ) и 5-подвижных (с числом  $p_5$ ) кинематических пар,

$$f \leq p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 4p_5 = \sum_{H=2}^{H=5} (H-1)p_H.$$

Универсальная структурная формула подвижности (2г) для отдельных семейств статически определимых механических систем (после подстановки в зависимость (2г) целых значений  $h$  во всем диапазоне  $1 \leq h \leq 6$ ) примет следующий вид:

$$W_{h=1} = \sum_{i=1}^i n_i + f - v - 1;$$

$$W_{h=2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K+W} (4-i)n_i + f - v - 2;$$

$$W_{h=3} = \sum_{i=1}^{K+W} (3-i)n_i + f - v - 3;$$

$$W_{h=4} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K+W} (8-3i)n_i + f - v - 4;$$

$$W_{h=5} = \sum_{i=1}^{K+W} (5-2i)n_i + f - v - 5;$$

$$W_{h=6} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K+W} (12-5i)n_i + f - v - 6.$$

Применительно к наиболее распространенным плоским и пространственным механическим системам *третьего* семейства ( $h = 3$ ) из универсальной формулы  $W$  (2в) получаем следующую *новую структурную формулу подвижности* (в двух разных формах записи):

$$W = [2n_1 + (n_2 - 3) + p_2] - [n_4 + 2n_5 + \dots + (i-3)n_i] - [v_2 + 2v_3 + \dots + (j-1)v_j]; \quad (2д)$$

$$W = [2n_1 + (n_2 - 3) + p_2] - \sum_{i=4}^{K+W} (i-3)n_i - \sum_{j=2}^{K+W} (j-1)v_j. \quad (2е)$$

Отсюда следует, что числа звеньев  $n_1, n_2, n_{i \geq 4}, v_{j \geq 2}$  увеличивают подвижность  $W$ , а  $n_3$  — не влияет.

3. Приведенное число многократных шарниров [10] определяется по теореме IV:

$$v = [v_2 + 2v_3 + 3v_4 + 4v_5 + \dots + (j-1)v_j] \leq [n_1 + 2(K-1)]. \quad (3)$$

4. Общее число звеньев любой механической системы  $\tilde{n}$  и общее число соединяющих их кинематических пар  $p$  (геометрических связей с любым числом накладываемых ими ограничений) можно представить [10] в виде универсальных зависимостей взаимосвязанных между собой одношарнирных и многошарнирных звеньев, образующих с учетом соотношения многократных шарниров (3) следующие конечные арифметические ряды:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n} &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + \dots + n_{K+W}; \\ p &= 0,5[n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 + \dots + (K+W)n_{K+W} + v], \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

однозначно ограниченные заданным числом замкнутых контуров  $K$  (т. е. уровнем сложности  $Y = K - 1$  синтезируемой системы), где в пределе  $i_{\max} = K + W$  (теорема II).

5. Определитель  $D$  целевой функции структурного синтеза статически определимых механических систем находится путем преобразования новой универсальной структурной формулы подвижности (2а) к общему виду (5а) — для синтеза неоднородных систем, или аналогичной формулы (2б) к общему виду (5б) — для синтеза однородных систем:

$$D = (\tilde{n} - 1) - \sum_{h=1}^{h=6} (h-1)K_h - W + f = 0; \quad (5а)$$

$$D = (\tilde{n} - 1) - (h-1)K - W + f = 0, \quad (5б)$$

где число  $f \leq p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 4p_5$  учитывает дополнительное число степеней свободы механической системы от применения в ней многоподвижных кинематических пар ( $H > 1$ ).

Аналогичным преобразованием (перенос всех слагаемых в левую часть уравнения) новой структурной формулы подвижности (2в) получаем аналитическую зависимость определителя целевой функции структурного синтеза оптимальных структур  $D = 0$ :

• в общем виде для любого из семейств однородных статически определимых механических систем ( $h = 1 \dots 6$ )

$$D = \left(\frac{h+1}{2}\right)n_1 + n_2 - \left\{\left(\frac{h-3}{2}\right)n_3 + \dots + \left[\left(\frac{h-1}{2}\right)(i-h)n_i\right]\right\} - (W + v + h) + f = 0; \quad (5в)$$

• для плоских и пространственных механизмов и ферм третьего семейства ( $h = 3$ ):

$$D = (2n_1 + n_2) - [n_4 + 2n_5 + 3n_6 + \dots + (i-3)n_i] - (W + v + 3) + p_2 = 0. \quad (5г)$$

Следует отметить, что при анализе правильности строения данной механической системы целевая функция  $D = 0$  указывает на отсутствие дефектов структуры исследуемого механизма ( $W \geq 1$ ) или фермы ( $W = 0$ ), а величина  $D \neq 0$  — на наличие и точно определяет число избыточных связей ( $D < 0$ ) или лишних неуправляемых подвижностей ( $D > 0$ ).

6. Структурная математическая «VIP-модель» в общем виде для любого из семейств статически определимых механических систем представляет собой совместную систему линейных алгебраических уравнений (2в), (3), (4), (5в):

$$\left. \begin{aligned} D &= \left(\frac{h+1}{2}\right)n_1 + n_2 - \left\{\left(\frac{h-3}{2}\right)n_3 + \dots + \left[\left(\frac{h-1}{2}\right)(i-h)n_i\right]\right\} - (W + v + h) + f = 0; \\ v &= [v_2 + 2v_3 + 3v_4 + 4v_5 + \dots + (K-1)v_K] \leq [n_1 + 2(K-1)]; \\ \tilde{n} &= n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{K+W} = (W + 1) + (h-1)K - f. \end{aligned} \right\} \quad (6а)$$

Согласно [10, 11] система уравнений (6) имеет общее решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} n_1 &\leq \tilde{n}; \\ \tilde{n} &\geq n_2 \geq (W + v + h) + \sum (i-3)n_i; \\ n_3 &\leq 2(K-1), n_4 \leq (K-1), \dots, n_i \leq 2; \\ v &\leq [n_1 + 2(K-1)]. \end{aligned}$$



$$K = [(p + g + d) + 1] - \tilde{n} = Y + 1;$$

$$Y = (p + g + d) - \tilde{n} = K - 1, \quad (8)$$

где расчетное число гибких и динамических связей равно числу замкнутых контуров, замыкаемых этими связями в данной многозвенной механической системе.

Величина  $K$  (8) определяет «уровень сложности механической системы  $Y$ » [6], равный разности суммы всех видов связей — кинематических, гибких, динамических ( $p + g + d$ ) и общего числа звеньев  $\tilde{n}$  системы ( $Y = K - 1 = -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots$ ).

9. Предлагаемая матрица рангов звеньев RLM (Rank Link Matrix) представляет новое понятие в теории структуры механических систем и вводится [11] для выявления всех возможных неизоморфных схем кинематических цепей (при решении классической задачи составления полного каталога структурно неповторяющихся схем, например, механизмов):

$$RLM = [r_k]_{\tilde{n}} = [r_1, r_2, \dots, r_{\tilde{n}}], \quad (9)$$

где ранг  $r_k$   $k$ -го звена (новое понятие в теории механизмов и машин) предлагается определять, как суммарное число вершин всех звеньев, непосредственно присоединяемых к этому звену в данной кинематической цепи; а критерием структурной неизоморфности (несовпадения) двух сравниваемых структур следует считать несовпадение их RLM-матриц по набору рангов составляющих их звеньев.

На основе вводимой матрицы рангов звеньев предлагается новый способ решения задачи структурного изоморфизма, не требующий перебора всех порядковых номеров звеньев:

1) выполняется ранговая нумерация всех звеньев анализируемой механической системы таким образом, чтобы их номер (ранг звена  $r_k$ ) отображал вид (суммарное число вершин) всех других звеньев, взаимодействующих с этим звеном в данной кинематической цепи;

2) для анализируемых систем выполняется составление и сравнение матриц рангов их звеньев (RLM) между собой (по набору рангов всех звеньев в данной цепи) и их отбраковка.

Например, для 6-звенных цепей Стефенсона и Уатта (с одинаковым набором звеньев [11, рис. 1])

их матрицы рангов звеньев (RLM) соответственно этим цепям имеют следующий вид:

$$RLM_1 = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6] = [556666];$$

$$RLM_2 = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6] = [555577],$$

т. е. содержат *различный* набор рангов звеньев, что однозначно указывает на структурную неизоморфность данных цепей (несмотря на их одинаковый состав:  $n_2 = 4, n_3 = 2, v = 0$ ).

Достоинства данного способа: не нужно составлять множество графов разных структурных схем и ответ не зависит от произвольного выбора порядкового номера звена.

10. *Общий критерий строения статически определимых* неоднородных (10а) и однородных (10б) механических систем имеет вид

$$\tilde{n} - \sum_{h=1}^{h=6} (h-1)K_h - W + f = 1; \quad (10a)$$

$$\tilde{n} - (h-1)K - W + f = 1, \quad (10б)$$

где замкнутые контуры I класса, замыкаемые гибкими или динамическими связями, образуют *однородные* механические системы первого семейства (где  $h = 1$ ), а замкнутые контуры II–VI классов, замыкаемые только геометрическими связями кинематических пар, образуют *однородные* механические системы соответственно второго ( $h = 2$ ), третьего ( $h = 3$ ), четвертого ( $h = 4$ ), пятого ( $h = 5$ ) и шестого ( $h = 6$ ) семейства. Сочетание замкнутых контуров, принадлежащих к разным семействам  $h$ , образует *неоднородные* механические системы особого седьмого семейства (его условное обозначение  $h_0 = 7$ ).

11. *Общее число звеньев  $\tilde{n}$  любой однородной статически определимой механической системы с  $K = K_{\min} = 1$  по критерию строения (10б) должно лежать в интервале от  $\tilde{n}_{\min}$  до  $\tilde{n}_{\max}$ :*

$$\tilde{n}_{\min} = W + h - f;$$

$$\tilde{n} = \tilde{n}_{\max} = W + [(h-1)K + 1]. \quad (11)$$

*Пояснения:* 1. Критерии (10) и (11) представляют собой необходимое и достаточное условие статической определимости данной механической системы и являются показателем правильности (бездефектности) ее структуры. Выполнение этих критериев достигается за

Таблица 2

Полный состав стандартных наборов многократных шарниров замкнутых многоконтурных кинематических цепей

$v = v_2 + 2v_3 + 3v_4 + 4v_5 + \dots + Y \cdot v_{Y+1} \leq 2Y; j_{\max} = Y+1=K; v_K \leq 2$													
$Y$	$Y=0, K=1$		$Y=1, K=2 (v_{\max}=2)$			$Y=2, K=3 (v_{\max}=4; j_{\max}=3)$							
$v$	$v=0$	$v=0$	$v=1$	$v=2$	$v=0$	$v=1$	$v=2$	$v=3$	$v=4$				
$v_2$	—	0	1	2	0	1	0	2	1	3	0	2	4
$v_3$	—	—	—	—	0	0	1	0	1	0	2	1	0

  

$Y=3, K=4 (v_{\max}=6; j_{\max}=4)$																					
$v$	0	1	$v=2$	$v=3$	$v=4$	$v=5$			$v=6$												
$v_2$	0	1	0	2	0	1	3	0	1	2	4	0	1	2	3	4	6				
$v_3$	0	0	1	0	0	1	0	2	0	1	0	1	0	0	3	1	2	0	1	0	
$v_4$	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	1	0	1	0	0

  

$Y=4, K=5 (v_{\max}=8; j_{\max}=5)$																				
$v$	$v=0$	$v=1$	$v=2$	$v=3$	$v=4$			$v=5$												
$v_2$	0	1	0	2	0	1	3	0	0	1	2	4	0	1	1	2	3	5		
$v_3$	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	1	0	1	2	0	0	1	0		
$v_4$	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$v_5$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

  

$Y=4, K=5 (продолжение)$																				
$v$	$v=6$						$v=7$													
$v_2$	0	0	0	1	2	2	3	4	6	0	0	1	1	1	2	3	3	4	5	7
$v_3$	0	1	3	1	0	2	0	1	0	0	2	0	1	3	1	0	2	0	1	0
$v_4$	2	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	2	0	0	1	0	0	1	0	0
$v_5$	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0

  

$Y=4, K=5 (продолжение)$															
$v$	$v=8$														
$v_2$	0	0	0	0	1	1	2	2	2	3	4	4	5	6	8
$v_3$	1	2	4	0	0	2	1	0	3	1	0	2	0	1	0
$v_4$	2	0	0	0	1	1	0	2	0	1	0	0	1	0	0
$v_5$	0	1	0	2	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0

Таблица 3

Универсальная структурная таблица расчетных стандартных кодов правильного строения 2-подвижных механизмов

$W=2, h=3, H=1$																
$K=1$	$K=2$		$K=2$								$h=3$ $W=2$ $i \leq K+W$					
$(\tilde{n}=5)$	$(\tilde{n}=7)$		(11 кодов строения $\tilde{n}=9$ )													
$v$	0	0	0	1	2	0	0	0	1	1	1	2	2	3	4	
$n_2$	5	6	7	7	8	8	9	6	7	8	8	9	7	8	8	9
$n_3$	—	2	0	1	0	4	2	0	1	3	1	0	2	0	1	0
$n_4$	—	—	1	—	—	0	1	2	0	0	1	0	0	1	0	0
$n_5$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

  

$K=4 (26 \text{ кодов строения } \tilde{n}=11)$																										
$v$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	6		
$n_2$	5	6	7	7	8	8	9	6	7	8	8	9	7	8	9	10	8	9	10	8	9	10	10	11		
$n_3$	6	4	2	3	0	1	2	0	5	3	1	2	0	1	4	2	0	1	0	3	1	0	2	0	1	0
$n_4$	0	1	2	0	3	1	0	0	0	1	2	0	1	0	0	2	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$n_5$	0	0	0	1	0	1	0	0	2	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	
$n_6$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

  

$W=2, h=3, H=1$																											
$K=5 (57 \text{ кодов строения } \tilde{n}=13)$																											
$v$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n_2$	5	6	7	7	8	8	9	9	9	9	10	10	10	11	6	7	8	8	9	9	10	10	10	10	11	10	11
$n_3$	8	6	4	5	2	3	4	0	1	2	2	3	0	1	0	7	5	3	4	1	2	3	0	1	1	2	0
$n_4$	0	1	2	0	3	1	0	4	2	0	1	0	1	2	0	0	1	2	0	3	1	0	2	0	1	0	0
$n_5$	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	0	2	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	2	0	0	1
$n_6$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
$n_7$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

  

$K=5 (продолжение)$																												
$v$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	6	6	7	8
$n_2$	7	8	9	9	10	10	11	11	11	11	8	9	10	10	11	12	9	10	11	11	12	10	11	12	11	12	12	13
$n_3$	6	4	2	3	0	1	2	0	1	5	3	1	2	0	1	0	4	2	0	1	0	3	1	0	2	0	1	0
$n_4$	0	1	2	0	3	1	0	0	1	0	1	2	0	1	0	0	1	2	0	0	1	2	0	0	1	0	0	0
$n_5$	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	0	2	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	2	0	0
$n_6$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$n_7$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

счет реализации целевой функции структурного синтеза  $D=0$  и означает, что данная система со структурными параметрами  $h, K, \tilde{n}, W$  в пространстве только данных значений этих параметров является статически определимой и не содержит вредных избыточных связей.

2. Новая формула подвижности (2д) может также применяться для определения подвижности  $W$  систем переменной структуры, возникающей, например, в приводах с динамическими связями [17] или в реальных рычажных механизмах с зазорами, где образуется область особых положений [9], не выявляемых матрицей Якоби в расчетах [24] идеализированных механизмов.

**Теоремы о строении и общие свойства статически определимых механических систем ( $D=0$ ).** Доказательство теорем следует из базовых структурных формул (2а) — (11) и подтверждается всеми (без исключения) цифровыми стандартными кодами правильного строения из составленных универсальных таблиц 1–7 (где для всех расчетных кодов структуры выполняется целевая функция структурного синтеза оптимальных структур  $D=0$ ).

**Теорема I.** Замкнутая механическая система должна обязательно содержать 2-вершинные (2-шарнирные) звенья, минимальное количество которых зависит от величины  $h=1...6$  семейства данной системы, от задаваемой ее подвижности  $W$  и числа применяемых многократных шарниров, а максимальное количество 2-вершинных звеньев всегда равно  $\tilde{n}$ :

$$\tilde{n} \geq n_2 \geq h + W + v; n_{2\min} = h + W + v; n_{2\max} = \tilde{n}.$$

**Теорема II.** Наибольшее число соединений (вершин) на одном звене  $i$ , посредством которых собирается многозвенная механическая система, а также общее число звеньев системы  $\tilde{n}$ , должно быть ограничено в зависимости от числа  $K$  взаимно независимых изменяемых замкнутых контуров механической системы — в пределах, равных  $(K+W)$ :

$$i \leq K+W; K = \frac{\tilde{n} - (W+1)}{h-1};$$





$$i_{\max} = K + W = \frac{(\tilde{n} - 1) + W(h - 2)}{h - 1};$$

$$\tilde{n} = n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_{K+W}.$$

Для  $h = 3$ :  $i_{\max} = 0,5[(\tilde{n} - 1) + W]$ ;

$$i_{\max} = (\tilde{n} - 1) + K(2 - h) = (\tilde{n} - 1) - K.$$

**Теорема III.** Число наиболее сложных многовершинных (многошарнирных) звеньев должно быть не более одного в структуре механических систем с многократными шарнирами (случай  $v \neq 0$ ) и не более двух в структуре механических систем, не имеющих многократных шарниров (случай  $v = 0$ ).

Доказательство теоремы представлено в работе [11] и подтверждается кодами табл. 1.

**Теорема IV.** Структурные параметры механических систем с однократными ( $v = 0, j = 1$ ) и/или многократными (случай  $v \neq 0, j \geq 2$ ) шарнирами должны удовлетворять полученному из совместного решения уравнений математической VIP-модели (6а) базисному уравнению сборки кинематических цепей (*a criterion I of valid kinematic chains*):

$$[n_1 + 2(K - 1)] - [n_3 + 2n_4 + \dots + (i - 2)n_i] = [v_2 + 2v_3 + \dots + (j - 1)v_j],$$

а приведенное число многократных шарниров  $v$  и их наибольшая кратность  $j_{\max}$  (в пределе  $j_{\max} = K + W$ ) должны быть ограничены в зависимости от числа возникающих в механической системе независимых замкнутых контуров  $K$  (*a criterion II of valid kinematic chains*):

$$\sum_{j=2}^{K+W} (j - 1)v_j \equiv [n_1 + 2(K - 1)] - \sum_{i=3}^{K+W} (i - 2)n_i;$$

$$v = [v_2 + 2v_3 + \dots + (j - 1)v_j] \leq [n_1 + 2(K - 1)];$$

$$K = 0,5[(v - n_1) + n_3 + 2n_4 + \dots + (i - 2)n_i] + 1.$$

**Теорема V.** Общее число звеньев  $\tilde{n}$  замкнутой статически определимой механической системы с *одноподвижными* кинематическими параметрами должно выбираться из разных арифметических рядов четных или нечетных чисел:

- число звеньев статически определимых плоских ферм ( $W = 0, h = 3$ ) должно быть *нечетным* независимо от количества замкнутых контуров  $K$ ;

- число звеньев  $\tilde{n}$  плоских и пространственных механизмов, существующих в пространствах движений  $h = 1, 3$  при задаваемых *нечетных* значениях  $W = 1, 3, 5, \dots$ , должно быть *четным* ( $\tilde{n} = 4; 6; 8, \dots$ ); а при задаваемых *четных* значениях  $W = 2, 4, \dots$  — *нечетным*;

- число звеньев плоских и пространственных механизмов, существующих в пространствах движений  $h = 2, 4, 6$ , должно быть *нечетным* при *четном*  $[W + (h - 1)K]$  или *четным* при *нечетном*  $[W + (h - 1)K]$ .

**Теорема VI.** Во всем возможном диапазоне семейств плоских и пространственных механических систем ( $h = 1; 2; 3; 4; 5; 6$ ) согласно общей формуле  $W$  (2г) только в двух многоконтурных семействах ( $h = 2; 3$ ) возникает необычное *свойство независимости подвижности системы* от количества определенного вида звеньев:

- от числа  $n_3$  3-вершинных (3-шарнирных) звеньев. Эта независимость  $W$  имеет место в механических системах  $h = 3$ ;

- от числа  $n_4$  4-вершинных (4-шарнирных) звеньев. Эта независимость  $W$  имеет место в механических системах  $h = 2$ .

#### Литература

- [1] Крайнев А.Ф. *Механика машин. Фундаментальный словарь*. Москва, Машиностроение, 2000. 904 с.
- [2] Пейсах Э.Е., Нестеров В.А. *Система проектирования плоских рычажных механизмов*. Москва, Машиностроение, 1988. 232 с.
- [3] Кожевников С.Н. *Основания структурного синтеза механизмов*. Киев, Наукова думка, 1979. 232 с.
- [4] Смелягин А.И. *Структура механизмов и машин*. Новосибирск, НГТУ, 2001. 286 с.
- [5] Пожбелко В.И. *Теория структуры механических систем. Методы решения задач синтеза механизмов*. Челябинск, Изд-во ЧГТУ, 1993, с. 19–56.
- [6] Пожбелко В.И. Структурный анализ и синтез плоских механизмов заданного уровня сложности по универсальной таблице стандартных кодов строения. *Теория механизмов и машин*, 2012, т. 10, № 1, с. 24–45.
- [7] Пожбелко В.И. Направленный синтез оптимальных структур плоских механических систем с совместными шарнирами. *Теория механизмов и машин*, 2013, № 1, с. 55–64.
- [8] Пожбелко В.И. Формализация структуры механизмов с кинематическими, гибкими и динамическими связями. *Вестник ЮУрГУ, сер. Машиностроение*, 2007, № (11)83, с. 21–32.
- [9] Пожбелко В.И. Возникновение переменной (изменяемой) структуры и расчет размеров области особых (неуправляемых) положений механизма с учетом зазоров и вырождения кинематических пар. *Теория механизмов и машин*, 2010, т. 8, № 2, с. 71–79.

[10] Пожбелко В.И. Некоторые вопросы структурного синтеза плоских рычажных механизмов с учетом применения сложных шарниров. *Теория механизмов и машин*, 2006, № 1, с. 27–37.

[11] Пожбелко В.И. Направленный синтез оптимальных структур плоских механических систем с совмещенными шарнирами (механизмы, фермы, группы Ассура, роботы). Ч. 1. *Теория механизмов и машин*, 2012, т. 10, № 2(20), с. 77–98.

[12] Пожбелко В.И. Структурный синтез и конструирование рычажных и планетарных самоустанавливающихся механизмов по уравнениям и таблицам безызыбыточных структур. *Вестник ЮУрГУ, сер. Машиностроение*, 2011, № 31, с. 4–14.

[13] Пожбелко В.И. Алгоритм быстрого структурного анализа и направленного синтеза самоустанавливающихся механизмов современного машиностроения на основе новой формулы подвижности. Современное машиностроение. *Наука и образование. Материалы 3-й Международ. научн.-практ. конф.* (20–21 июня 2013 г.). Санкт-Петербург, Изд-во СПбГПУ, 2013, с. 819–832.

[14] Ballaney P.L. *Theory of Machines*. Delhi, Khanna Publishers, 1992. 484 p.

[15] Erdman A.G., Sandor G.N. *Mechanism Design: Analysis and Synthesis*, vol. 1. Prentice — hall of USA, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984. 530 p.

[16] Решетов Л.Н. *Самоустанавливающиеся механизмы. Справочник*. Москва, Машиностроение, 1979. 334 с.

[17] Пожбелко В.И. *Инерционно-импульсные приводы машин с динамическими связями (единая теория и методы создания с заданными динамическими свойствами)*. Москва, Машиностроение, 1989. 136 с.

[18] Галиуллин И.А. О применении механизма Брикарда и его модификаций. Проблемы механики современных машин. *Материалы V Международ. конф.* (25–30 июня 2012 г.). Улан-Удэ, Изд-во ВСГУТУ, 2012, с. 11–14.

[19] Глинка Н.Л. *Общая химия. Структура кристаллов*. Ленинград, Химия, 1986. 704 с.

[20] Прохоров Ю.В. *Математический энциклопедический словарь*. Москва, Наука, 1988. 847 с.

[21] Пожбелко В.И., Лившиц В.А. *Теория механизмов и машин в вопросах и ответах*. Челябинск, Изд-во ЮУрГУ, 2004. 439 с.

[22] Вульфсон И.И., Коловский М.З., Семенов Ю.В., Слоущ А.В. *Механика машин*. Москва, Высшая школа, 1996. 511 с.

[23] Фролов К.В., Попов С.А., Тимофеев Г.А., Мусатов А.К. *Теория механизмов и механика машин*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 664 с.

[24] Коловский М.З., Евграфов А.Н., Семенов Ю.А., Слоущ А.В. *Теория механизмов и машин*. Москва, Издательский центр «Академия», 2006. 560 с.

## References

[1] Krainev A.F. *Mekhanika mashin. Fundamental'nyi slovar'* [Mechanics of Machines. Fundamental dictionary]. Moscow, Mashinostroenie publ., 2000. 904 p.

[2] Peisakh E.E., Nesterov V.A. *Sistema proektirovaniia ploskikh rychazhnykh mekhanizmov* [System design of plane lever mechanisms]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1988. 232 p.

[3] Kozhevnikov S.N. *Osnovaniia strukturnogo sinteza mekhanizmov* [The grounds of the structural synthesis of mechanisms]. Kiev, Naukova dumka publ., 1979. 232 p.

[4] Smeliagin A.I. *Struktura mekhanizmov i mashin* [The structure of mechanisms and machines]. Novosibirsk, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev publ., 2001. 286 p.

[5] Pozhbelko V.I. *Teoriia struktury mekhanicheskikh sistem. Metody resheniia zadach sinteza mekhanizmov* [The theory of the structure of mechanical systems. Problem-solving methods of synthesis mechanisms]. Cheliabinsk, South Ural State University publ., 1993, pp. 19–56.

[6] Pozhbelko V.I. *Strukturnyi analiz i sintez ploskikh mekhanizmov zadannogo urovnia slozhnosti po universal'noi strukturnoi tablitsе standartnykh kodov stroeniia* [Structural analysis and synthesis planar mechanisms setting level of significance by universal enumeration standard designing codes]. *Teoriia mekhanizmov i mashin* [Theory of Mechanisms and Machines]. 2012, vol. 10, no. 1, pp. 24–45.

[7] Pozhbelko V.I. *Napravlennyi sintez optimal' struktur ploskikh mekhanicheskikh sistem s sovmeshchennymi sharnirami* [Directed structural synthesis of optimal planar mechanical systems with complex pin-joints]. *Teoriia mekhanizmov i mashin* [Theory of Mechanisms and Machines]. 2013, no. 1, pp. 55–64.

[8] Pozhbelko V.I. *Formalizatsiia struktury mekhanizmov s kinematicheskimi, gibkimi i dinamicheskimi svyaziami* [Formalization structural analysis and synthesis of mechanisms with kinematic, flexible and dynamic links]. *Vestnik IuUrGU. Ser. Mashinostroenie* [Herald South Ural State University. Ser. Engineering]. 2007, no. (11)83, pp. 21–32.

[9] Pozhbelko V.I. *Vozniknovenie peremennoi (izmeniaemoi) struktury i raschet razmerov oblasti osobykh (neupravliaemykh) polozhenii mekhanizma s uchetom zazorov i vyrozhdeniia kinematicheskikh par* [Generation variable structure and district particular configurations of the mechanism with chinks and degeneration of the kinematic pairs]. *Teoriia mekhanizmov i mashin* [Theory of Mechanisms and Machines]. 2010, vol. 8, no. 2, pp. 71–79.

[10] Pozhbelko V.I. *Nekotorye voprosy strukturnogo sinteza ploskikh rychazhnykh mekhanizmov s uchetom primeneniia slozhnykh sharnirov* [Some questions of structural synthesis of planar linkages based on the application of complex joints]. *Teoriia mekhanizmov i mashin* [Theory of Mechanisms and Machines]. 2006, no. 1, pp. 27–37.

[11] Pozhbelko V.I. *Napravlennyi sintez optimal'nykh struktur ploskikh mekhanicheskikh sistem s sovmeshchennymi sharnirami (mekhanizmy, fermy, gruppy Acursa, roboty). Chast' 1* [Directed structural synthesis of optimal planar mechanical systems with complex pin-joints (mechanism, pin framework, Assur group, robot). Part 1]. *Teoriia mekhanizmov i mashin* [Theory of Mechanisms and Machines]. 2012, vol. 10, no. 2, pp. 77–98.

[12] Pozhbelko V.I. *Strukturnyi sintez i konstruirovaniie rychazhnykh i planetarnykh samoustanavlivaushchikhsia mekhanizmov po uravneniiam i tablitsam bezyzbytochnykh struktur* [Structural synthesis and design linkages and planetary self-adjustment meshanisms by equations and tables of static defined mechanical systems]. *Vestnik IuUrGU. Ser. Mashinostroenie* [Herald South Ural State University. Ser. Engineering]. 2011, no. 31, pp. 4–14.

[13] Pozhbelko V.I. *Algoritm bystrogo strukturnogo analiza i napravlennogo sinteza samoustanavlivaushchikhsia mekhanizmov sovremennogo mashinostroeniia na osnove novoi formuly podvizhnosti* [Algorithm of quick structural analysis and directed synthesis elf-aligning mechanical systems in the present machine-building on base new degree of freedom equation]. *Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie. Materialy 3-ei Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii (20–21 iunია 2013 g.)* [Modern engineering. Science and education. Proceedings of the 3-rd International Scientific Conference (20–21 June 2013)]. Ed. Radkevich M.M., Evgrafova A.N. St.Petersburg, St.Petersburg State Polytechnical University publ., 2013, pp. 819–832.

[14] Ballaney P.L. *Theory of Machines*. Delhi, Khanna Publishers, 1992. 484 p.

[15] Erdman A.G., Sandor G.N. *Mechanism Design: Analysis and Synthesis*, vol. 1. Prentice – hall of USA, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984. 530 p.

[16] Reshetov L.N. *Samoustanavlivaiushchiesia mekhanizmy: Spravochnik* [Self-aligning mechanisms: Directory]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1979. 334 p.

[17] Pozhbelko V.I. *Inertsionno-impul'snye privody mashin s dinamicheskimi svyaziami* [Inertial-pulse drive machines with dynamic links]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1989. 136 p.

[18] Galiullin I.A. *O primenenii mekhanizma Brikarda i ego modifikatsii* [On the application of the mechanism and its modifications Brikarda]. *Problemy mekhaniki sovremennykh mashin. Materialy 5 mezhdunarodnoi konferentsii (25–30 iyunia 2012 g.)* [Problems of modern machines. 5 Materials International Conference (25–30 June 2012)]. Ulan-Ude, East Siberia State University of Technology and Management publ., 2012, pp. 11–14.

[19] Glinka N.L. *Obshchaia khimiia. Struktura kristallov* [General Chemistry. The structure of crystals]. Leningrad, Khimiia publ., 1985. 704 p.

[20] Prokhorov Iu.V. *Matematicheskii entsiklopedicheskii slovar'* [Encyclopedic Dictionary of Mathematics]. Moscow, Nauka publ., 1988. 847 p.

[21] Pozhbelko V.I., Livshits V.A. *Teoriia mekhanizmov i mashin v voprosakh i otvetakh* [Theory of mechanisms and machines in questions and answers]. Cheliabinsk, South Ural State University publ., 2004. 439 p.

[22] Vul'fon I.I., Kolovskii M.Z., Semenov Iu.V., Sloushch A.V. *Mekhanika mashin* [Mechanics of Machines]. Moscow, Vysshaia shkola publ., 1996. 511 p.

[23] Frolov K.V., Popov S.A., Timofeev G.A., Musatov A.K. *Teoriia mekhanizmov i mekhanika mashin* [Theory of mechanisms and mechanics of machines]. Moscow, Bauman Press, 2004. 664 p.

[24] Kolovskii M.Z., Evgrafov A.N., Semenov Iu.A., Sloushch A.V. *Teoriia mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and mechanics of machines]. Moscow, Akademiia publ., 2006. 560 p.

Статья поступила в редакцию 11.07.2013

## Информация об авторе

**ПОЖБЕЛКО Владимир Иванович** (Челябинск) — заслуженный работник высшей школы РФ, доктор технических наук, профессор. Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет). (454080, Челябинск, Российская Федерация, Ленина пр-т, д. 76, e-mail: vipox@inbox.ru).

## Information about the author

**POZHBELKO Vladimir Ivanovich** (Chelyabinsk) — Honored Worker of Higher School of the Russian Federation, Dr. Sc. (Eng.), Professor, South Ural State University (National Research University) (SUSU, Lenina ave., 76, 454080, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: vipox@inbox.ru).