

ВОРОНОВ

Сергей Александрович
доктор технических наук,
профессор кафедры
«Прикладная механика»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

НЕПОЧАТОВ

Андрей Владимирович
аспирант кафедры
«Прикладная механика»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

КИСЕЛЕВ

Игорь Алексеевич
аспирант кафедры
«Прикладная механика»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Критерии оценки устойчивости процесса фрезерования нежестких деталей

С.А. Воронов
А.В. Непочатов
И.А. Киселев

Рассматривается математическая модель, которая позволяет численно исследовать процесс фрезерования нежестких деталей цилиндрической фрезой. Применение прямого численного интегрирования позволяет получать более точные границы зон устойчивых параметров процесса фрезерования по сравнению с зонами устойчивости, полученными при исследовании линейной модели. Разработан дополнительный критерий устойчивости процесса, основанный на анализе качества обработанной поверхности. Численно построены диаграммы устойчивых параметров процесса фрезерования с использованием дополнительного критерия устойчивости.

Ключевые слова: динамика, критерии устойчивости, фрезерование, нежесткие детали.

The mathematical model for milling process analysis of non-stiff workpieces by the cylindrical tool in the paper is presented. The method of the direct numerical integration of model equations is applied. This method allows obtaining stability lobes border more accurately in comparison with the linear model stability analysis. An additional stability criterion estimating machined surface quality was developed and included into the model. The stability lobes applying the additional stability criteria were numerically constructed.

Keywords: dynamics, stability criterion, milling, details with low rigidity

Введение

На современном этапе развития промышленности механическая обработка металлов резанием является основным методом изготовления деталей в машиностроении. При этом большую долю операций обработки составляет процесс фрезерования. Этому способствует стремление к сокращению и унификации технологических операций в процессе изготовления детали, а также появление новых станков с числовым программным управлением, позволяющих обрабатывать детали практически любой сложности. Следует отметить, что наряду с требованиями, предъявляемыми к производительности фрезерных станков, возросли и требования, предъявляемые к точности изготавливаемых деталей. В авиационной, космической и автомобильной промышленности точность деталей служит одним из основных показателей их качества, а условия ее обеспечения — важнейшим условием

надежности любых технологических систем. Основной причиной снижения надежности и стабильности процесса резания являются колебания в технологической системе как вследствие переменной по времени силы резания, так и вследствие автоколебаний.

Обеспечение надежности предполагает выполнение двух условий: как максимум — исключение возможности возникновения колебаний, как минимум — уменьшение их амплитуды до приемлемого уровня, который определяется исходя из требований к качеству получаемой поверхности (шероховатость и т. д.). Поэтому повышение точности процесса фрезерования за счет увеличения виброустойчивости системы «станок — деталь» является актуальной задачей и представляет значительный практический интерес.

В середине 90-х гг. XX в. произошел значительный прорыв в области использования высокоскоростных методов обработки деталей резанием. Скорость вращения шпинделя в станках для высокоскоростного фрезерования достигает 30 000 об/мин, а скорость резания — 50 м/с. Это позволяет значительно сэкономить время, затрачиваемое на обработку деталей. Высокоскоростное фрезерование применяют в аэрокосмической отрасли при изготовлении тонкостенных деталей, которые имеют сложную пространственную геометрию (стойки, кронштейны, шпангоуты, элементы шасси и т. д.) и толщина стенок которых не превышает 2—5 мм. В целях экономии веса в современном авиастроении подобные детали изготавливаются из легких жаропрочных титаноникелевых сплавов. Отсюда очевидна необходимость достаточно точного подбора параметров процесса машинной обработки, так как в случае ошибки в выборе, например, скорости вращения фрезы или величины подачи обрабатываемая деталь будет необратимо испорчена.

В настоящее время имеется достаточно большое количество исследований, посвященных анализу устойчивости процесса обработки и выбору рациональных режимов фрезерования. В большинстве из них процесс лезвийной обработки определяется нелинейной, неоднородной системой уравнений, включающей переменные с запаздывающим аргументом. Но

если не учитывать такие явления, как трение, возможность выхода режущей кромки инструмента из обрабатываемой детали и прочие структурные нелинейности, то система уравнений может быть сведена к линейной.

Анализ устойчивости процесса резания для различных операций лезвийной обработки с помощью линейных моделей содержится в работах Г.И. Грановского, В.Г. Грановского, Y. Altintas, M. Weck, S.D. Merdol [1, 2, 3, 4]. Значительным недостатком линеаризованных моделей является то, что с их помощью можно лишь приблизительно предсказать зоны возникновения неустойчивых вибраций в системе «инструмент — фреза», а также оценить качество получаемой поверхности в зонах устойчивых параметров процесса в стационарном режиме. Таким образом, крайне затруднительно выбрать рациональный режим резания без значительного числа экспериментальных исследований.

В работах Hanna, Tobias, Minis, Yanushevsky, Zhao, Balachandran [5, 6, 7] рассматривается моделирование процесса фрезерования с учетом нелинейности силы резания и периодического выхода режущих кромок инструмента из обрабатываемой детали. Решения, приведенные в этих работах, были получены разложением в ряд, что значительно упрощает анализ устойчивости, но не позволяет оценить качество итоговой поверхности.

Для общего случая процесса фрезерования достоверные результаты можно получить путем численного интегрирования полной системы уравнений модели, которая сводится к нелинейным дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом. Существует ряд исследований, которые были направлены на численное моделирование процессов фрезерования. Например, в работах Kline, DeVor, Shareef [8] приведен алгоритм численного моделирования с целью прогнозирования качества получаемой поверхности за счет статических перемещений в системе «инструмент — деталь» без учета регенеративного эффекта.

Имеется также целый ряд трудов, посвященных численному анализу зон устойчивости. Tlusty [9, 10] представил алгоритм получения зон устойчивости с учетом нелинейной природы сил резания и применил полученную мо-

дель для построения зон устойчивости при высокоскоростной обработке резанием. Численному моделированию процессов фрезерования нежестких деталей посвящены исследования Montgomery и Y. Altintas, Lee, Marc L. Campomaness [11, 12, 13].

В настоящей работе описывается алгоритм численного моделирования процесса фрезерования с жесткой прямозубой фрезой. Динамические характеристики (жесткость, демпфирование, масса) системы «инструмент — деталь» были определены экспериментально. В разработанной модели учитывается регенеративный эффект возбуждения вибраций под действием сил резания, имеющих нелинейную структуру. Силы резания определяются как функции мгновенной толщины срезаемой стружки, полученной с учетом вибраций «системы инструмент — деталь».

В результате получены изменение толщины срезаемой стружки, динамические силы резания, построена диаграмма устойчивых режимов фрезерования. В работе введен дополнительный критерий устойчивости процесса фрезерования, оценивающий итоговое качество обрабатываемой поверхности (макронеровность), полученный с учетом колебаний фрезы. Введение этого критерия позволяет определить рациональные режимы фрезерования в зависи-

мости от заданного качества обработки поверхности. Построены уточненные диаграммы устойчивых режимов фрезерования с учетом использования дополнительного критерия.

Модель процесса фрезерования

В данной работе рассматривается процесс фрезерования жесткой цилиндрической прямозубой фрезой нежестких деталей (рис. 1).

Фреза моделируется как вращающийся жестко закрепленный диск. Обрабатываемая деталь моделируется как твердое тело с двумя степенями свободы. Жесткостные характеристики модели в направлении осей x и y определяются экспериментально или из конечно-элементного моделирования собственных колебаний системы.

Система дифференциальных уравнений, в общем виде описывающих эту расчетную модель, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} m_x \cdot \ddot{x} + k_x \cdot \dot{x} + c_x \cdot x = F_x(t, t - \tau), \\ m_y \cdot \ddot{y} + k_y \cdot \dot{y} + c_y \cdot y = F_y(t, t - \tau), \end{cases} \quad (1)$$

где k_x, k_y — демпфирование; c_x, c_y , — жесткость (Н/м); m_x, m_y — обобщенная масса (кг). Здесь $F_x(t, t - \tau)$ и $F_y(t, t - \tau)$ (Н) — сумма всех сил, действующих на фрезу и приложенных в ее центре тяжести.

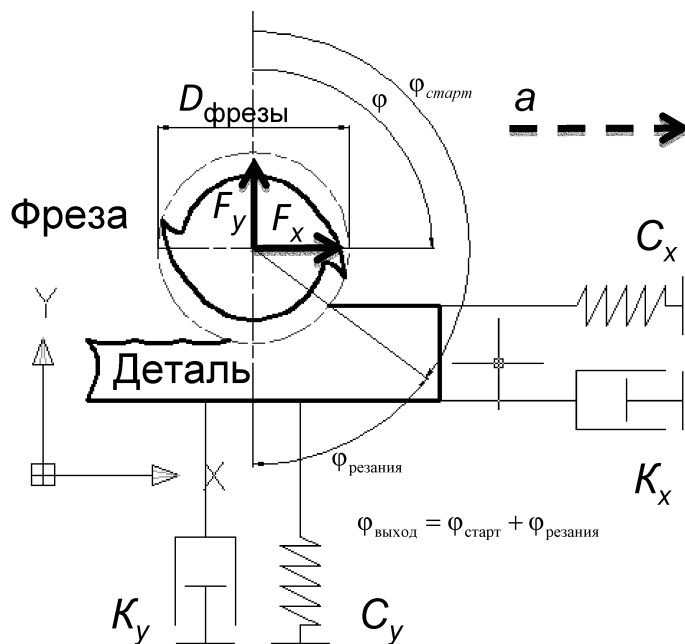


Рис. 1. Расчетная модель процесса фрезерования

$$F_x(t, t - \tau) = \sum_{j=1}^N F_{xj}(t, t - \tau), \quad (2)$$

$$F_y(t, t - \tau) = \sum_{j=1}^N F_{yj}(t, t - \tau),$$

где N — число режущих кромок (зубьев) фрезы. При этом следует отметить, что свой вклад в суммарную силу резания режущая кромка вносит только в том случае, если находится в пределах зоны резания:

$$F_{xj}(t, t - \tau) = \begin{cases} F_{xj}(t, t - \tau), & \varphi_{st} < \varphi_j < \varphi_{ex}, \\ 0, & \varphi_j < \varphi_{st} \text{ или } \varphi_j > \varphi_{ex}, \end{cases} \quad (3)$$

где φ_{st} — угол входа режущей кромки в зону резания; φ_{ex} — угол выхода режущей кромки из зоны резания.

Таким образом, в общем случае система управляющих уравнений процесса фрезерования представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием (сек). При этом величина запаздывания является переменной по времени.

В пределах описываемой математической модели величина запаздывания считается постоянной и равна периоду прохода зубьев:

$$\tau = \frac{60}{N \cdot \Omega} \text{ (сек).}$$

Здесь Ω — угловая скорость (об/мин).

Режущие силы определяются пропорционально толщине срезаемой стружки:

$$F_{tj} = K_t b h(\varphi_j);$$

$$F_{rj} = K_r F_{tj}, \quad (4)$$

где F_{tj} и F_{rj} — силы, действующие на режущую кромку в окружном и радиальном направлениях; K_t — постоянная сил резания в окружном направлении (МПа); K_r — коэффициент пропорциональности между окружной и радиальной составляющими силы резания; $h(\varphi_j)$ — толщина срезаемой стружки (м), где $\varphi_j = \omega \cdot t$ — угловая координата режущей кромки (рад), ω — угловая скорость (рад/сек) (рис. 2).

Толщина срезаемой стружки $h(\varphi_j)$ включает в себя как статическую, так и динамическую составляющие:

$$h(\varphi_j) = [a \sin \varphi_j + \Delta x \sin \varphi_j + \Delta y \cos \varphi_j] g(\varphi_j), \quad (5)$$

где a — величина подачи в направлении оси x (мм/зуб); $a \sin \varphi_j$ — статическая составляющая, обусловленная вращением фрезы как жесткого целого; $[\Delta x \sin \varphi_j + \Delta y \cos \varphi_j]$ — динамическая составляющая, обусловленная вибрацией инструмента; $g(\varphi_j)$ — функция, определяющая, находится ли зуб в зоне резания или нет:

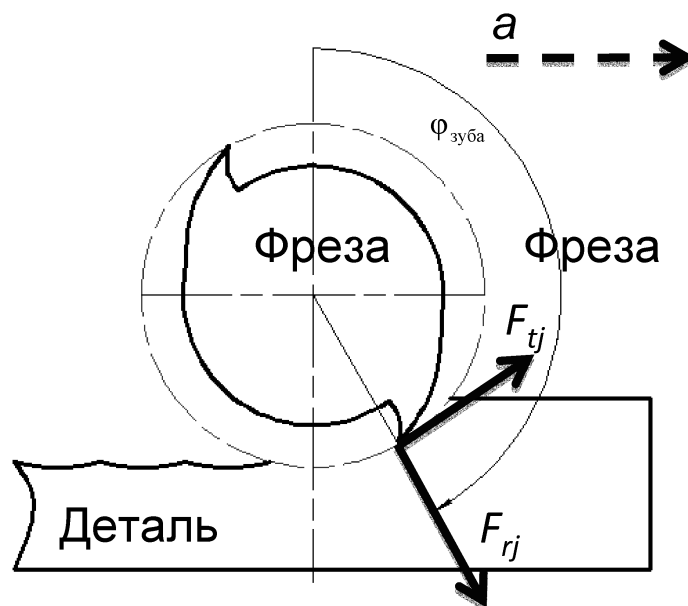


Рис. 2. Силы, действующие на режущую кромку

$$g(\varphi_j) = \begin{cases} 1, & \varphi_{st} < \varphi_j < \varphi_{ex}, \\ 0, & \varphi_j < \varphi_{st} \text{ или } \varphi_j > \varphi_{ex}. \end{cases} \quad (6)$$

$\Delta x = x(t) - x(t - \tau)$ — динамическое смещение инструмента в результате предыдущего и настоящего прохождения режущей кромки инструмента в направлении оси x ;

$\Delta y = y(t) - y(t - \tau)$ — аналогично в направлении оси y .

В итоге выражения для окружной и радиальной сил имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F_{ij} &= K_t b h(\varphi_j) = K_t b g(\varphi) (a \sin(\varphi) + (x(t) - \\ &- x(t - \tau) \sin(\varphi) + (y(t) - y(t - \tau) \cos(\varphi)), \\ F_{rj} &= K_r F_{ij} = K_r K_t b g(\varphi) (a \sin(\varphi) + \\ &- x(t - \tau) \sin(\varphi) + (y(t) - y(t - \tau) \cos(\varphi)). \end{aligned} \quad (7)$$

Перейдем от окружной и радиальной составляющей сил резания к составляющим в направлении главных осей x и y :

$$\begin{aligned} F_x(\varphi) &= -F_t(\varphi) \cos \varphi - F_r(\varphi) \sin \varphi; \\ F_y(\varphi) &= +F_t(\varphi) \sin \varphi - F_r(\varphi) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Итоговая система дифференциальных уравнений, описывающая систему «инструмент — деталь», принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{F_x(\varphi)}{m_x} - \frac{k_x}{m_x} \dot{x} - \frac{c_x}{m_x} \cdot x, \\ \dot{y} = \frac{F_y(\varphi)}{m_y} - \frac{k_y}{m_y} \cdot \dot{y} - \frac{c_y}{m_y} \cdot y. \end{cases} \quad (9)$$

Для численного интегрирования приведем полученную систему к нормальному виду Коши. В результате получаем систему из четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2, \\ \dot{q}_2 = \frac{F_x(\varphi)}{m_x} - \frac{k_x}{m_x} \cdot q_2 - \frac{c_x}{m_x} \cdot q_1, \\ \dot{q}_3 = q_4, \\ \dot{q}_4 = \frac{F_y(\varphi)}{m_y} - \frac{k_y}{m_y} \cdot q_4 - \frac{c_y}{m_y} \cdot q_3. \end{cases} \quad (10)$$

Критерии устойчивости

Основной причиной, понижающей качество получаемой в результате фрезерования поверхности, являются колебания, возникающие в системе «инструмент — деталь».

Наряду с вынужденными колебаниями системы, обусловленными переменной по времени силой резания, в системе возможно также возбуждение автоколебаний, которые возникают в широком диапазоне режимов резания.

Причиной, по которой в системе возникают колебания, служит регенеративный эффект (или «резание по следу»). Физический смысл регенеративного эффекта заключается в том, что переменная режущая сила вызывает колебания инструмента, вследствие чего на обрабатываемой поверхности детали остаются «волны», которые срезаются при следующем прохождении инструмента (или следующим зубом инструмента), в результате чего на поверхности также образуются неровности («волны»). В зависимости от разности фаз между этими двумя поверхностями максимальная толщина снимаемой стружки может возрасти, что, в свою очередь, приводит к увеличению режущей силы (рис. 3).

Колебания могут привести не только к снижению качества обрабатываемой поверхности, но и повреждению инструмента.

Основной целью анализа устойчивости процесса фрезерования является определение зон устойчивых параметров системы «инструмент — деталь», при которых возможно получение требуемого качества поверхности.

В настоящей работе предлагается введение двух критериев устойчивости: основного, оценивающего амплитуды вибраций фрезы, и дополнительного, оценивающего качество обрабатываемой поверхности.

За основной критерий устойчивости удобнее всего принимать величину амплитуды относительных колебаний фрезы и обрабатываемой детали. В качестве лимитирующего значения амплитуды с целью отсека заведомо неустойчивых процессов и процессов с заведомо низким качеством итоговой поверхности была выбрана величина, численно равная 25% от подачи инструмента.

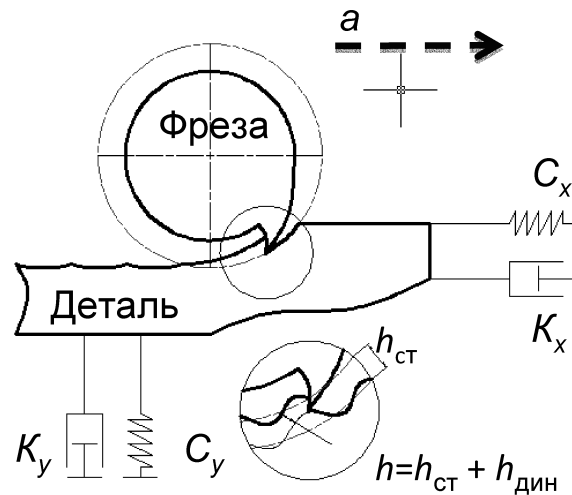


Рис. 3. Регенеративный эффект

Основной критерий устойчивости можно сформулировать следующим образом: *амплитуда относительных колебаний центра тяжести фрезы и обрабатываемой детали в направлении итоговой поверхности на некоторой базовой длине не должна превышать величину, численно равную 25% от величины подачи инструмента:*

$$S(t) \ll 0,25a. \quad (11)$$

Исследования системы показали, что за базовую длину можно принимать величину пути, которую центр тяжести фрезы пройдет за 25—30 полных оборотов в направлении подачи ин-

струмента, при условии что все переходные процессы в системе завершены (для данной системы — 3—7 оборотов фрезы).

В данном случае колебания в направлении итоговой поверхности совпадают с колебаниями в направлении главной оси y .

По полученным на базовой длине амплитудам колебаний строится отображение Пуанкаре. Под отображением Пуанкаре [14] понимается точечное отображение экстремумов функции перемещения фрезы в направлении обрабатываемой поверхности (рис. 4).

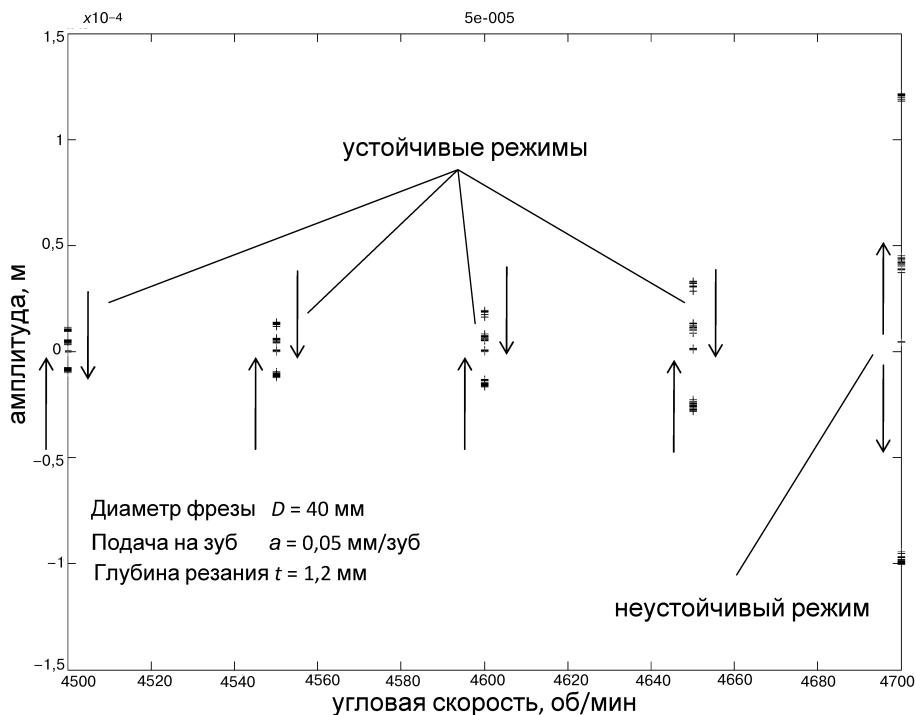
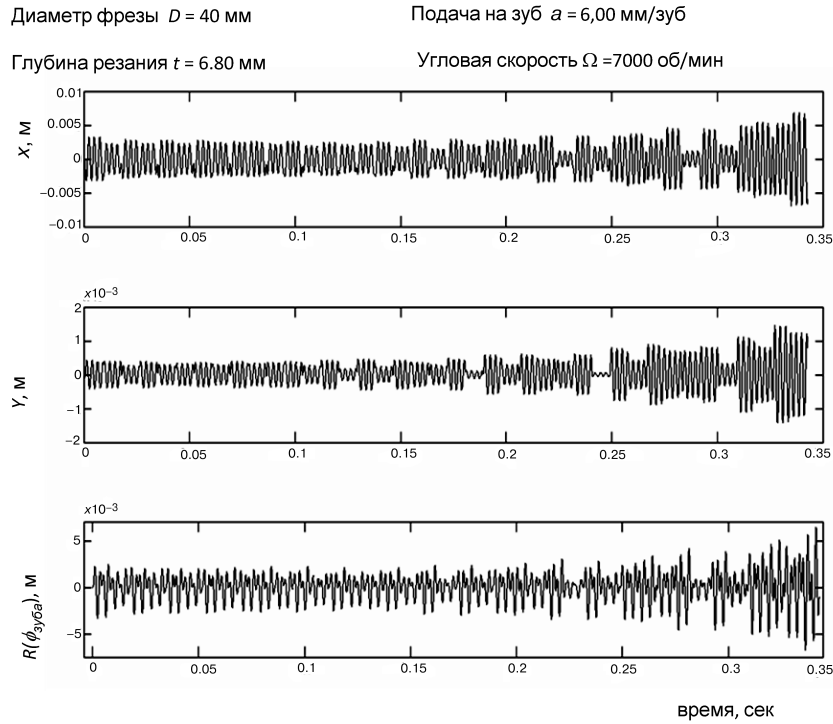


Рис. 4. Отображение Пуанкаре для амплитуды колебаний в направлении итоговой поверхности

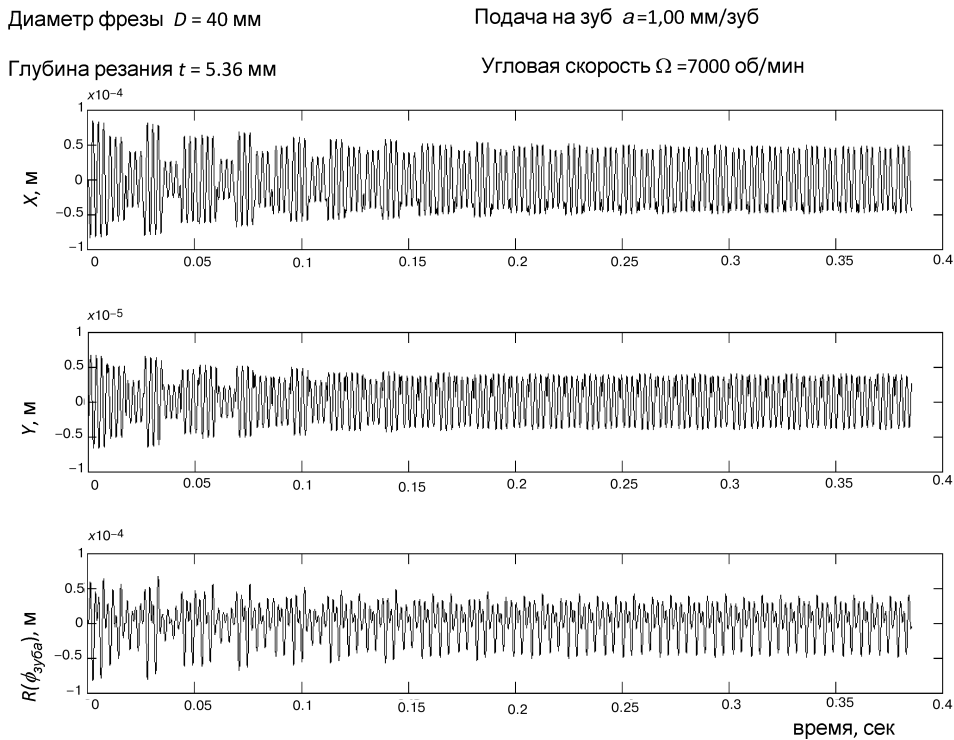
Если амплитуды колебаний со временем нарастают, то режим считается неустойчивым (рис. 5, а); если амплитуда фрезы пульсирует относительно некоторого среднего значения без нарастания и при этом максимальное зна-

чение амплитуды не превышает лимитирующего значения, то режим фрезерования считается предварительно устойчивым (рис. 5, б).

Для дальнейшего уточнения устойчивости процесса с выбранными параметрами фрезеро-



а



б

Рис. 5. Неустойчивый (а) и устойчивый (б) по основному критерию режимы фрезерования

вания задается дополнительный параметр устойчивости, оценивающий получаемое качество поверхности. За эталонную принимается поверхность, получаемая без учета влияния колебаний на систему (квазистатическая поверхность). При этом допустимое значение данного параметра может варьироваться в зависимости от требуемого качества итоговой поверхности. В пределах данной работы максимально допустимым значением отклонения от статической поверхности выбрано 30%.

Дополнительный критерий устойчивости формулируется следующим образом: *средняя высота шероховатости поверхности, с учетом влияния динамических перемещений, на выбранной базовой длине не должна превышать среднюю высоту шероховатости итоговой поверхности, без учета динамических перемещений, более чем на 30%:*

$$\frac{\mu_{\text{дин}}}{\mu_{\text{ст}}} \leq 1,3. \quad (12)$$

На основании сформулированных критериев устойчивости алгоритм определения устойчивых режимов фрезерования выглядит следующим образом:

- построение математической модели;

- экспериментальное или численное определение динамических характеристик системы;
- анализ амплитуд колебаний фрезы в направлении итоговой поверхности;
- предварительное определение областей устойчивых параметров процесса с использованием основного критерия устойчивости;
- исследование зон с предварительно устойчивыми режимами фрезерования с использованием дополнительного критерия устойчивости.

Анализ результатов численного моделирования

В результате анализа устойчивости получены области устойчивых режимов фрезерования. За изменяемые параметры системы были выбраны угловая скорость вращения шпинделя и величина подачи инструмента. Ширина резания b и глубина резания полагались постоянными.

В случае, когда при исследовании устойчивости применялся только основной критерий (11) оценки стабильности процесса фрезерования, без учета качества получаемой итоговой

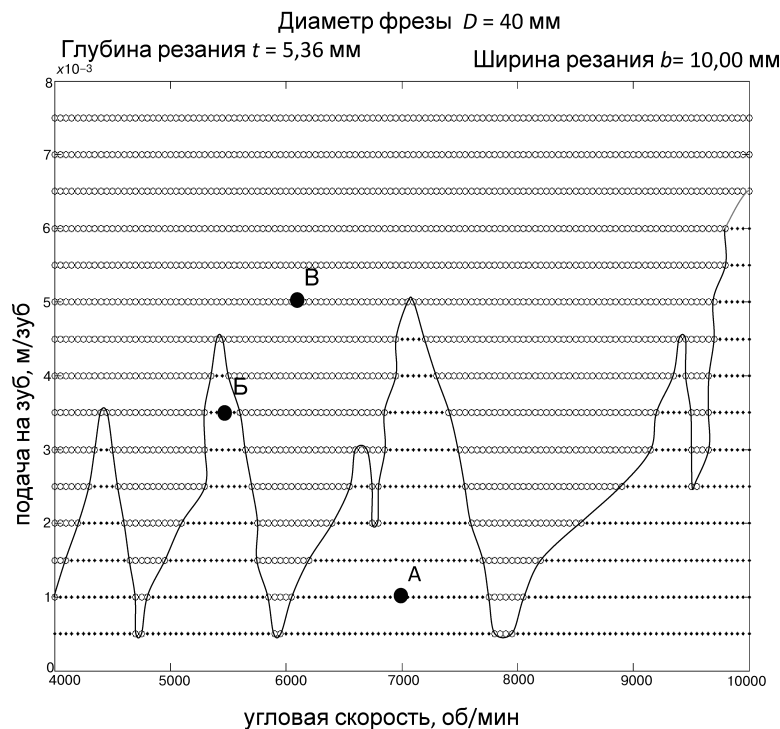
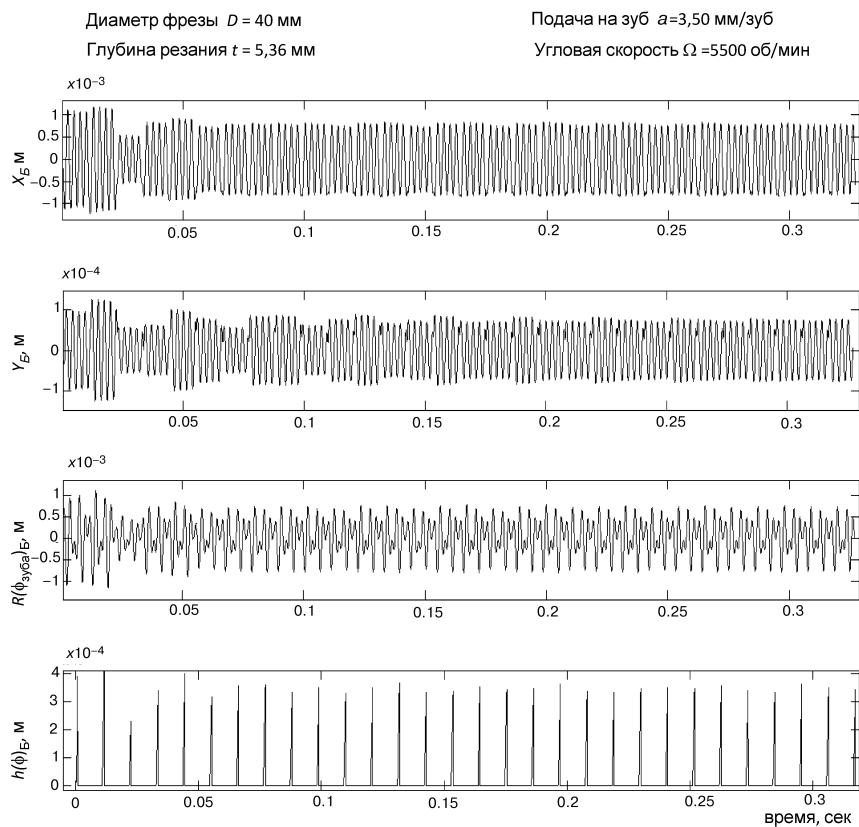
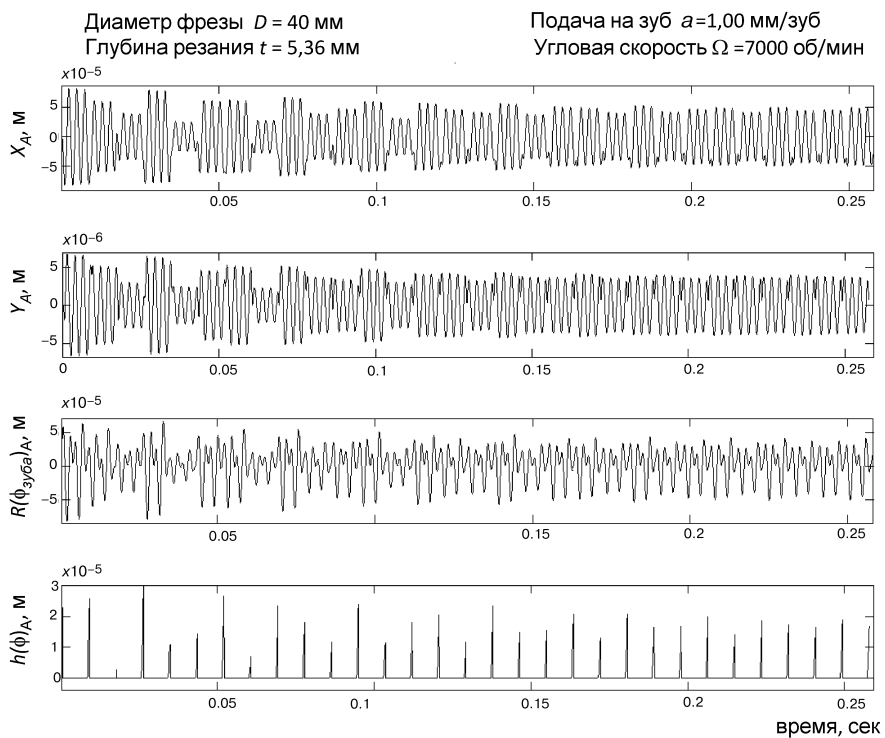


Рис. 6. Области устойчивых по основному критерию режимов фрезерования

поверхности, области устойчивых режимов имеют следующий вид (рис. 6).

На рис. 7, а, б, в показаны амплитуды колебания фрезы в направлении главных осей x , y и в направлении режущей кромки для устойчи-



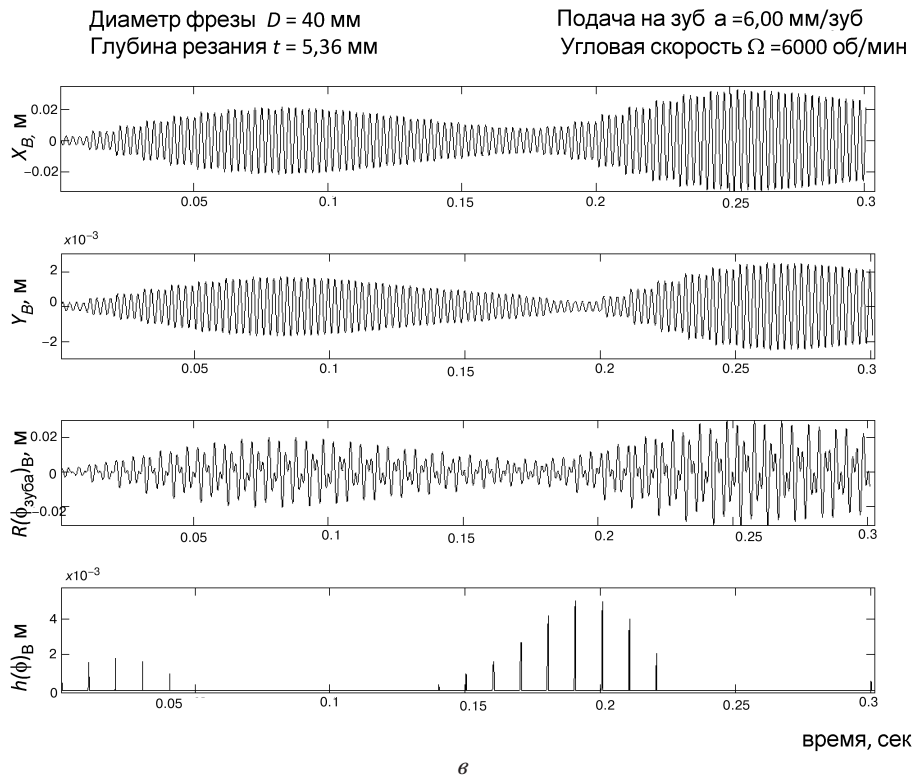


Рис. 7. Устойчивый (а), пограничный (б) и неустойчивый (в) по основному критерию режимы фрезерования

вых, пограничных и неустойчивых режимов фрезерования без использования дополнительного критерия оценки устойчивости, а также толщина срезаемой стружки для этих режимов.

Неустойчивые режимы характеризуются постепенным нарастанием амплитуды колебаний во времени. Устойчивые (по основному критерию) режимы характеризуются пульсацией амплитуды колебаний.

Вид срезаемой стружки для пограничного и устойчивого режимов фрезерования показан на рис. 8, а, б; на рис. 8, в приведен вид срезаемой стружки для неустойчивого режима.

Основной критерий устойчивости позволяет оценить величину амплитуды относительных колебаний в системе «инструмент — деталь» и отсеять заведомо неустойчивые (постепенное возрастание амплитуды) режимы, а также режимы, где качество итоговой поверхности заведомо хуже требуемого.

Введение дополнительного критерия устойчивости (12) позволяет сузить зоны устойчивых параметров процесса, подобрать рациональные режимы фрезерования для обеспечения требуемого качества итоговой поверхности. На рис. 9 для сравнения приведены динамическая и ква-

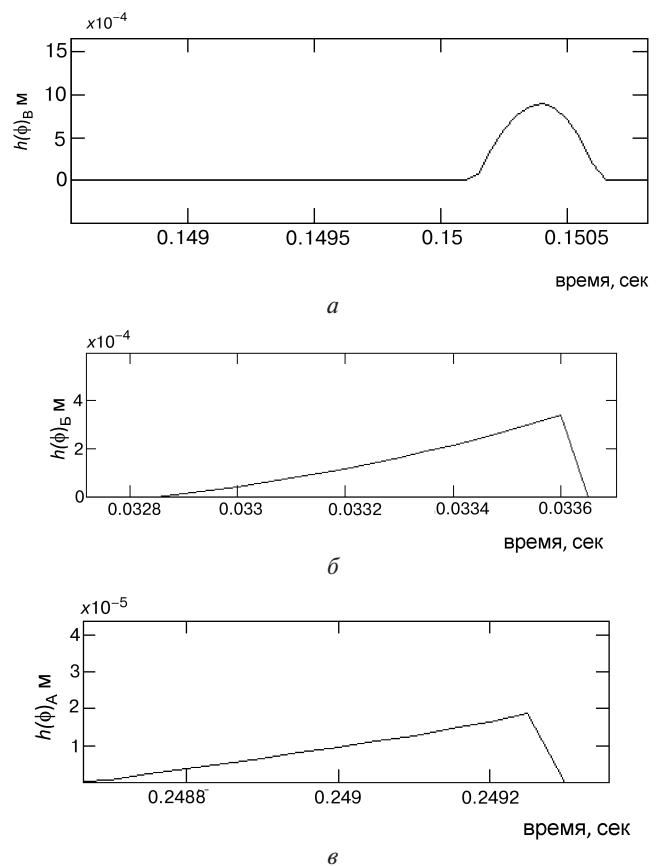


Рис. 8. Толщина срезаемой стружки для устойчивого (а), пограничного (б) и неустойчивого (в) режимов

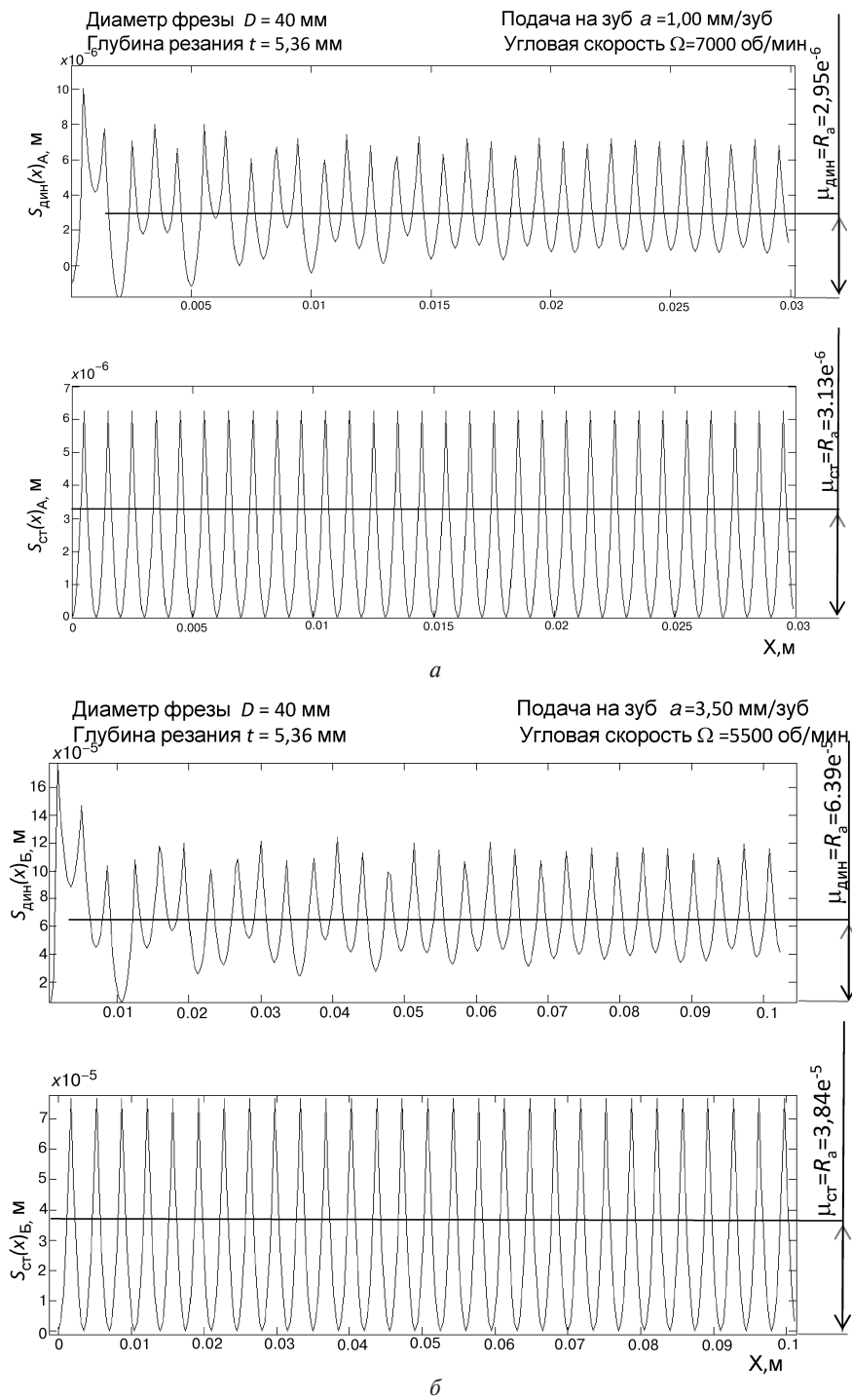


Рис. 9. Динамическая и квазистатическая поверхность для устойчивого (а) и пограничного (б) режимов фрезерования

зистатическая (без учета вибраций) поверхности для устойчивого и пограничного режимов (см. точки А, Б на рис. 6).

Для оценки качества итоговой поверхности применим дополнительный критерий устойчивости. Для процесса фрезерования, характеризуемого точкой А (см. рис. 6),

$$\frac{\mu_{\text{дин}}}{\mu_{\text{ст}}} = 0,94 < 1,3; \text{ для процесса фрезерования, характеризуемого точкой Б (см. рис. 6),}$$

$$\frac{\mu_{\text{дин}}}{\mu_{\text{ст}}} = 1,66 > 1,3.$$

Таким образом, процесс фрезерования, характеризуемый точкой А, является устойчивым

и удовлетворяет требуемому качеству итоговой поверхности, в то время как процесс фрезерования, характеризуемый точкой Б, хоть и является предварительно устойчивым, но заданному требованию итоговой поверхности не удовлетворяет.

Использование дополнительного критерия позволяет сузить зоны устойчивых параметров процесса (рис. 10).

На рис. 11 представлен трехмерный профиль итоговой поверхности для устойчивого процесса (точка А на рис. 10).

Полученные зоны устойчивости качественно совпадают с результатами, полученными Marc L. Campomanes, Y. Altintas [13] для процесса фрезерования прямозубой цилиндрической фрезой.

Выводы

Разработанная модель позволяет численно исследовать устойчивость процесса фрезерования нежестких деталей.

Введен дополнительный критерий устойчивости, оценивающий качество поверхности, что позволяет наиболее рациональным образом по-

добрать режимы, обеспечивающие заданную производительность и точность обработки.

Использование прямого численного интегрирования при исследовании устойчивости процесса фрезерования позволяет получить более точные границы зон устойчивых параметров по сравнению с зонами устойчивости при исследовании линейной модели.

Список литературы

1. Грановский Г.И., Грановский В.Г. Резание металлов. М.: Высшая школа, 1985.
2. Altintas Y. Metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design». Cambridge University press, 2000.
3. Altintas Y., Weck M. Chatter stability of metal cutting and grinding. Annals of CIRP. Key Note Paper of STC-M. Vol. 53/2. Pp. 619–642.
4. Merdol S.D., Altintas Y. «Multi frequency solution of chatter stability for low immersion milling» Trans. ASME J. Manuf. Sci. Eng. 2004. № 126(3). Pp. 459–466.
5. Hanna N.H., Tobias, S.A. A theory of nonlinear regenerative chatter. Trans. ASME. Journal of Engineering for Industry. 1974. № 96. Pp. 247–255.
6. Minis I., Yanushevsky T. A new theoretical approach for the prediction of the machine tool chatter in milling. Trans. ASME. Journal of Engineering for Industry. 1993. № 115. Pp. 1–8.
7. Zhao M.X., Balachandran B. Dynamics and stability of milling process. International journal of solids and structures. 2001. № 38. Pp. 2233–2248.

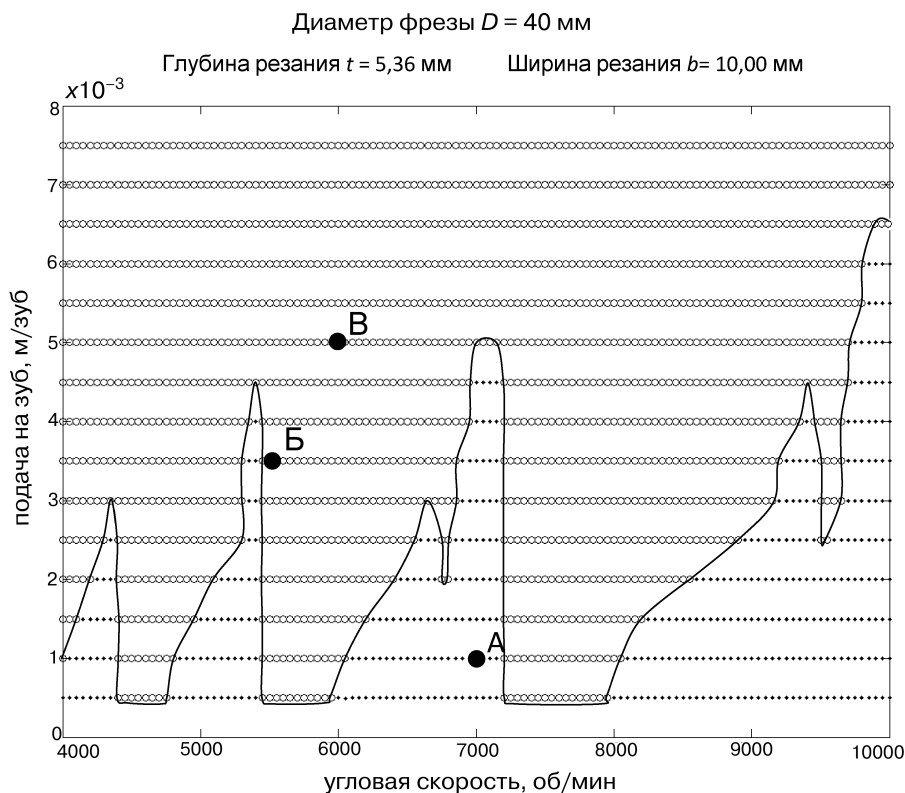


Рис. 10. Области устойчивых режимов фрезерования

Диаметр фрезы $D = 40$ мм
Глубина резания $t = 5,36$ мм

Подача на зуб $a = 1,00$ мм/зуб
Угловая скорость $\Omega = 7000$ об/мин

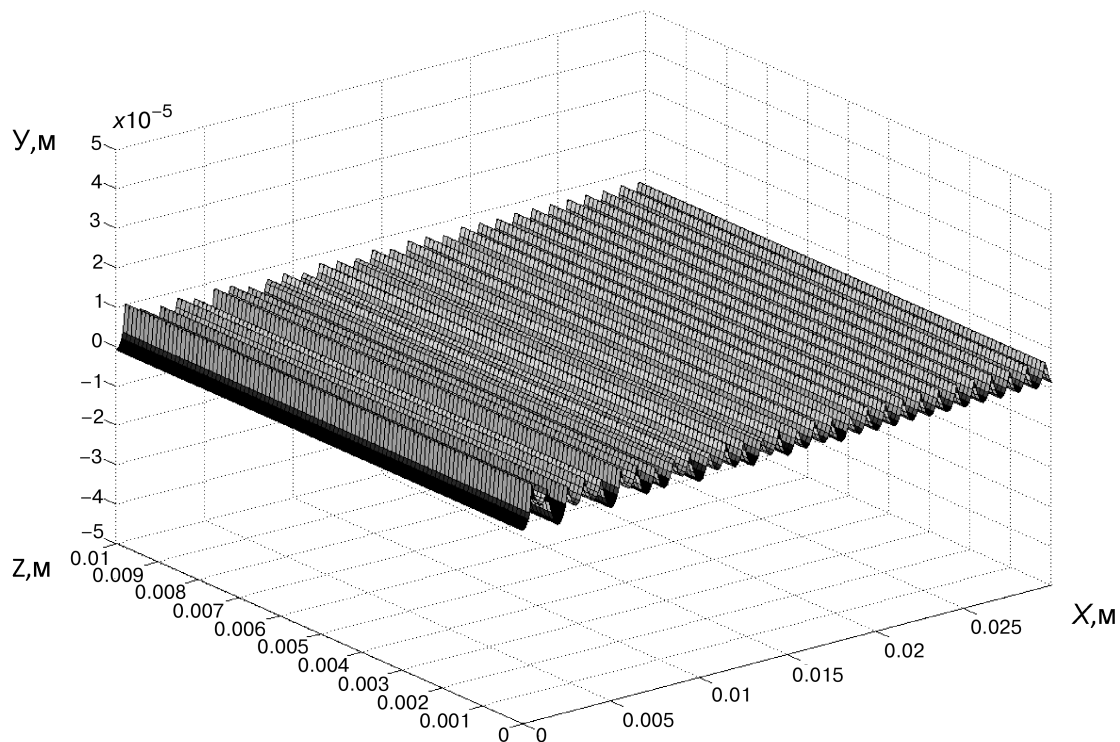


Рис. 11. Итоговая поверхность для устойчивого по основному и дополнительному критериям процесса

8. Kline W.A., DeVor R.E., Shareef, I.A. The prediction of surface accuracy in End Milling. Trans. ASME. Journal of Engineering for Industry. 1982. № 104. Pp. 272—278.

9. Tlustý J., Ismail F. Basic Nonlinearity in Machining chatter. CIRP Ann. 1981. № 30. Pp. 21—25.

10. Tlustý J. Dynamics of High Speed Milling. ASME Journal of Engineering for Industry. 1986. № 108. Pp. 59—67.

11. Montgomery D., Altintas Y. Mechanism of cutting force and surface generation in dynamic milling. ASME Journal of Engineering for Industry. 1993. № 115. Pp. 245—252.

12. Altintas Y., Lee P. Mechanics and Dynamics of Ball-end milling. ASME J. Manuf. Sci. Eng. 1998. № 120. Pp. 684—692.

13. Campomanes M.L., Altintas Y. An Improved Time Domain Simulation for Dynamic Milling at Small Radial Immersions. Trans. ASME. Journal of Manufacturing Science and Engineering. 2003. № 125. Pp. 416—422.

14. Базыкин А.В., Кузнецов Ю.А., Хибник А.И. Портреты бифуркаций: бифуркационные диаграммы плоских динамических систем. М.: Знание, 1989.

Статья поступила в редакцию 18.11.2010 г.