№ 8 2007

621.430

УНИФИЦИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МНОГОМАССОВАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ МНОГООСНОГО АВТОМОБИЛЯ

Д-р техн. наук, проф. С.В. БАХМУТОВ, асп. Д.Н. ГУСАКОВ

При составлении системы уравнений, представляющей собой математическое описание автомобиля, определяющим фактором является число переменных. Оно, в свою очередь, суммируется, исходя из количества масс системы и числа степеней свободы каждой из них. При исследовании управляемости и устойчивости автомобиля рассматривается общая схема движения, в которой основными массами являются кузов (подрессоренная масса) и колеса (неподрессоренные массы).

Defining a set of equations that represent the mathematical model of the car, the major factor is a number of variables. This number, in its turn, is being summarized from system mass number and each degree of freedom. At steering and car stability tests the common traffic diagram is examined in which the basic mass is the car body (sprung weight) and sprockets (unsprung weight).

Главная задача — координатное согласование всех масс, входящих в систему, другими словами, выбор системы координат, единой для всех масс (только в этом случае возможно совместное решение уравнений, входящих в математическое описание автомобиля). Как известно, наибольшее удобство представляет собой подвижная система координат, привязанная к какой-либо массе. Такой подход позволяет вычислять координаты подвижной системы относительно неподвижной (базовой), которые, в свою очередь, используются для вычисления перемещений автомобиля. Удобство состоит в том, что моменты инерции массы, с которой жестко связана система координат, остаются постоянными.

В случае многомассовой системы возникает проблема, обусловленная вычислением моментов инерции масс, центр которых не совпадает с центром выбранной подвижной системой координат. Логично привязать подвижную систему координат к кузову автомобиля (неподрессоренной массе), в центре масс автомобиля. Но остается задача вычисления моментов инерции неподрессоренных масс, которая может быть решена двумя способами. В первом случае координаты неподрессоренных масс (колес) остаются независимыми, к ним привязываются индивидуальные системы координат, а связь систем осуществляется посредством углов Брайнта. Данный вариант неудобен тем, что на каждом шагу интегрирования необходимо пересчитывать все силовые и координатные факторы, входящие в уравнения, с учетом изменяющегося взаимного положения систем координат. Кроме того, несвязанные системы при определенной погрешности интегрирования могут «разойтись», т.е. после возвращения системы в состояние покоя взаимные линейные и угловые координаты систем могут не соответствовать начальным. Второй вариант предполагает использование единой системы координат. В этом случае силовые факторы, как внешние, так и внутренние, входят во все уравнения системы в едином виде. Однако в таком случае моменты инерции неподрессоренных масс являются переменными и должны некоторым образом пересчитываться на каждом шаге интегрирования.

Очевидно, что в целях упрощения моделирования моменты и произведения инерции неподрессоренных масс рациональнее приводить к центру пятна контакта колес с дорогой. Тогда внешние силовые факторы, действующие на автомобиль со стороны дороги, будут приложены в точках, к которым приведены инерционные характеристики непод-

рессоренных масс, и появляется возможность избежать дополнительных вычислений, связанных с переносом внешних сил.

Для вычисления приведенных инерционных характеристик колес воспользуемся формулами для переноса моментов и произведений инерции в параллельную и повернутую системы координат.

Для переноса моментов и произведений инерции в параллельную систему координат из главной используются сокращенные формулы*

$$I_{x'} = I_x + m\left(y'^2 + z'^2\right), \qquad (1^{\mathrm{I}})$$

$$I_{y'} = I_y + m\left(x'^2 + z'^2\right), \qquad (1^{\mathrm{II}})$$

$$I_{z'} = I_z + m\left(y'^2 + x'^2\right), \qquad (1^{\mathrm{III}})$$

$$P_{x'y'} = P_{xy} + mx'y', \qquad (1^{\mathrm{IV}})$$

$$P_{y'z'} = P_{yz} + my'z', \qquad (1^{\mathrm{V}})$$

$$P_{x'z'} = P_{xz} + mx'z'. \qquad (1^{\mathrm{VI}})$$

Когда производится перенос моментов и произведений инерции в повернутую систему координат с началом, совпадающим с началом исходной системы координат, целесообразно использовать направляющие косинусов, связывающих оси. В таблице связь координат представлена при помощи коэффициентов (оси x, y, z — первоначальные, а x', y', z' — повернутые).

Таблица

Новые координаты	Первоначальные координаты		
	x	y	z
x'	α_1	β_1	γ_1
y'	α_2	β_2	γ_2
z'	α_3	β_3	γ_3

Новые координаты выражаются через первоначальные при помощи коэффициентов в горизонтальных строках

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$

(координаты y' и z' вычисляются аналогично)

Обратный переход осуществляется при помощи коэффициентов в вертикальных строках

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'.$$

Моменты инерции в повернутой системе координат в общем виде выразятся так:

$$I_{x'} = \alpha_1^2 I_x + \beta_1^2 I_y + \gamma_1^2 I_z - 2\beta_1\gamma_1 P_{yz} - 2\alpha_1\beta_1 P_{xy} - 2\alpha_1\gamma_1 P_{xz}, \qquad (2^{\mathrm{I}})$$

$$I_{y'} = \alpha_2^2 I_x + \beta_2^2 I_y + \gamma_2^2 I_z - 2\beta_2\gamma_2 P_{yz} - 2\alpha_2\beta_2 P_{xy} - 2\alpha_2\gamma_2 P_{xz}, \qquad (2^{\mathrm{II}})$$

* Принятые обозначения см. в приложении 1, которое размещено автором в Интернете по адресу http://multimass-model.narod.ru/articles/unitied-model/article1.htm.

$$I_{z'} = \alpha_3^2 I_x + \beta_3^2 I_y + \gamma_3^2 I_z - 2\beta_3\gamma_3 P_{yz} - 2\alpha_3\beta_3 P_{xy} - 2\alpha_3\gamma_3 P_{xz}. \qquad (2^{III})$$

Произведения инерции относительно повернутых осей

$$P_{x'y'} = -\alpha_1\alpha_2 I_x - \beta_1\beta_2 I_y - \gamma_1\gamma_2 I_z + P_{xy}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \\ + P_{xz}(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) + P_{yz}(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1), \qquad (2^{IV})$$

$$P_{x'z'} = -\alpha_1\alpha_3 I_x - \beta_1\beta_3 I_y - \gamma_1\gamma_3 I_z + P_{xy}(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1) + \\ + P_{xz}(\alpha_1\gamma_3 + \alpha_3\gamma_1) + P_{yz}(\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1), \qquad (2^{V})$$

$$P_{y'z'} = -\alpha_2\alpha_3 I_x - \beta_2\beta_3 I_y - \gamma_2\gamma_3 I_z + P_{xy}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + \\ + P_{xz}(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2) + P_{yz}(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2). \qquad (2^{VI})$$

Пусть $O'X'Y'Z'$ — неподвижная система координат. Зафиксируем подвижную систему координат $OXYZ$ в центре масс автомобиля, связав ее линейные и угловые перемещения с соответствующими перемещениями подрессоренной массы, что обеспечивает постоянство моментов инерции и произведений инерции кузова как основной массы независимо от его положения в пространстве. Примем, что в начальный момент оси подвижной и неподвижной систем координат совпадают, причем плоскости XOY и $X'O'Y'$ параллельны поверхности дороги.

Для описания движения принятой расчетной модели как системы взаимосвязанных масс воспользуемся уравнениями Лагранжа в независимых координатах, которые в общем виде могут быть представлены следующим образом*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i. \qquad (3)$$

Из теоретической механики известно, что абсолютные скорости произвольной точки жесткого тела с координатами в подвижной системе x_j, y_j, z_j имеют вид

$$\dot{x}_j = V_x + \dot{r}z_j - \dot{\psi}y_j, \\ \dot{y}_j = V_y - \dot{p}z_j + \dot{\psi}x_j, \\ \dot{z}_j = V_z - \dot{r}x_j + \dot{p}y_j. \qquad (4)$$

Соответственно кинетическая энергия произвольной массы будет

$$T = \frac{1}{2}\sum \delta m_j \left(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2\right). \qquad (5)$$

Согласно выбранному в модели расположению осей координат (рис. 1), кинетическая энергия подрессоренной массы

$$T = \frac{1}{2}\sum \delta m_j \left[\begin{array}{l}\left(V_x + \dot{r}z_j - \dot{\psi}y_j\right)^2 + \left(V_y - \dot{p}z_j + \dot{\psi}x_j\right)^2 + \\ + \left(V_z - \dot{r}x_j + \dot{p}y_j\right)^2\end{array}\right]. \qquad (6)$$

Поскольку подвижная система координат связана с подрессоренной массой, в целях определения кинетической энергии неподрессоренных масс требуется установить связи между скоростями перемещений подрессоренных и неподрессоренных масс, определя-

* Расшифровку обозначений см. в приложении 1, там же.

емые кинематическими характеристиками подвески, под которыми понимается отношение абсолютных скоростей перемещения неподрессоренных масс к скоростям подрессоренной массы в направлении возможных перемещений

$$k_j^{q,q'_i} = \frac{\partial q'_i}{\partial q_i}, \tag{7}$$

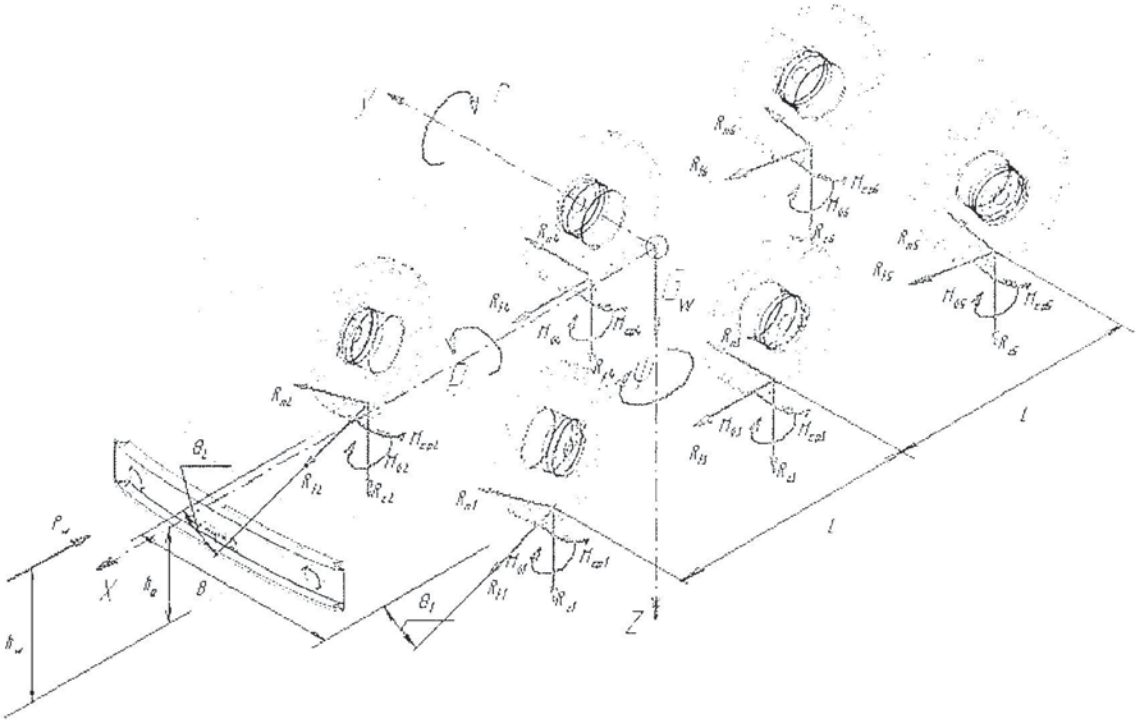

Рис. 1. Расчетная схема трехосного автомобиля и внешние силовые факторы, действующие на него

Таким образом, перемещение каждой неподрессоренной массы определяется шестью кинематическими характеристиками подвески, соответствующими возможным перемещениям в пространстве.

Абсолютные скорости элементарной неподрессоренной массы δm_j по направлению осей x, y, z найдем в соответствии с общими формулами (4)

$$\dot{x}'_j = V_x + \dot{r}z'_j - \left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi}V_z - k_j^{p\psi}\dot{p} - k_j^{r\psi}\dot{r}\right)y'_j + k_j^{zx}V_z + k_j^{rx}\dot{r} + k_j^{px}\dot{p},$$

$$\dot{y}'_j = V_y - \left(k_j^{pp}\dot{p} - k_j^{zp}V_z - k_j^{rp}\dot{r}\right)z'_j + \left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi}V_z - k_j^{p\psi}\dot{p} - k_j^{r\psi}\dot{r}\right)x'_j -$$

$$- k_j^{ry}\dot{r} - k_j^{py}\dot{p} - k_j^{zy}V_z,$$

$$\dot{z}'_j = k_j^{zz}V_z - \dot{r}x'_j + \left(k_j^{pp}\dot{p} - k_j^{zp}V_z - k_j^{rp}\dot{r}\right)y'_j + k_j^{rz}\dot{r}. \tag{8}$$

Проанализировав характер полученных производных подвески, отметим, что координаты произвольной точки неподрессоренной массы не являются постоянными, а зависят от текущих значений r, p, z. Получим следующие выражения для x'_j, y'_j, z'_j:

$$x'_j = x'_{j0} + k_j^{rx} r + k_j^{px} p + k_j^{zx} z,$$
$$y'_j = y'_{j0} - k_j^{ry} r - k_j^{py} p - k_j^{zy} z,$$
$$z'_j = z'_{j0} + k_j^{rz} r + k_j^{pz} p + k_j^{zz} z. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получим

$$\begin{aligned}
\dot{x}'_j &= V_x + \dot{r}\left(z'_{j0} + k_j^{rz} r + k_j^{pz} p + k_j^{zz} z\right) - \left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi} V_z - k_j^{p\psi}\dot{p} - k_j^{r\psi}\dot{r}\right)\times \\
&\times\left(y'_{j0} - k_j^{ry} r - k_j^{py} p - k_j^{zy} z\right) + k_j^{zx} V_z + k_j^{rx}\dot{r} + k_j^{px}\dot{p}, \\
\dot{y}'_j &= V_y - \left(k_j^{pp}\dot{p} - k_j^{zp} V_z - k_j^{rp}\dot{r}\right)\left(z'_{j0} + k_j^{rz} r + k_j^{pz} p + k_j^{zz} z\right) + \\
&+\left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi} V_z - k_j^{p\psi}\dot{p} - k_j^{r\psi}\dot{r}\right)\left(x'_{j0} + k_j^{rx} r + k_j^{px} p + k_j^{zx} z\right) - k_j^{ry}\dot{r} - k_j^{py}\dot{p} - k_j^{zy} V_z, \\
\dot{z}'_j &= k_j^{zz} V_z - \dot{r}\left(x'_{j0} + k_j^{rx} r + k_j^{px} p + k_j^{zx} z\right) + \left(k_j^{pp}\dot{p} - k_j^{zp} V_z - k_j^{rp}\dot{r}\right)\times \\
&\times\left(y'_{j0} - k_j^{ry} r - k_j^{py} p - k_j^{zy} z\right) + k_j^{rz}\dot{r}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Следовательно, кинетическая энергия неподрессоренной массы будет

$$T_j = \frac{1}{2}\sum \delta m_j \left(\begin{aligned}
&\left(\begin{aligned}&V_x + \dot{r}\left(z'_{j0} + k_j^{rz} r + k_j^{pz} p + k_j^{zz} z\right) - \left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi} V_z - k_j^{p\psi}\dot{p} - k_j^{r\psi}\dot{r}\right)\times \\ &\times\left(y'_{j0} - k_j^{ry} r - k_j^{py} p - k_j^{zy} z\right) + k_j^{zx} V_z + k_j^{rx}\dot{r} + k_j^{px}\dot{p}\end{aligned}\right)^2 + \\
&+\left(\begin{aligned}&V_y - \left(k_j^{pp}\dot{p} - k_j^{zp} V_z - k_j^{rp}\dot{r}\right)\left(z'_{j0} + k_j^{rz} r + k_j^{pz} p + k_j^{zz} z\right) + \\ &+\left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi} V_z - k_j^{p\psi}\dot{p} - k_j^{r\psi}\dot{r}\right)\left(x'_{j0} + k_j^{rx} r + k_j^{px} p + k_j^{zx} z\right) - \\ &k_j^{ry}\dot{r} - k_j^{py}\dot{p} - k_j^{zy} V_z\end{aligned}\right)^2 + \\
&+\left(\begin{aligned}&k_j^{zz} V_z - \dot{r}\left(x'_{j0} + k_j^{rx} r + k_j^{px} p + k_j^{zx} z\right) + \left(k_j^{pp}\dot{p} - k_j^{zp} V_z - k_j^{rp}\dot{r}\right)\times \\ &\times\left(y'_{j0} - k_j^{ry} r - k_j^{py} p - k_j^{zy} z\right) + k_j^{rz}\dot{r}\end{aligned}\right)^2
\end{aligned}\right) \tag{11}$$

Решение уравнений (6) и (11) относительно каждой из обобщенных координат дает левые части уравнений Лагранжа второго рода для подрессоренной и неподрессоренных масс соответственно.

При составлении уравнений движения многомассовой системы, очевидно, необходимо исходить из того, что связь элементов системы однозначно определяется кинематическими либо силовыми факторами. В рассматриваемом случае кинематическая связь задается направляющим аппаратом подвески (математически выражается при помощи коэффициентов кинематических характеристик подвески). Неизвестным фактором является силовое взаимодействие подрессоренной и неподрессоренных масс системы. Поэтому при разработке математической модели предлагается в качестве независимых переменных, описывающих влияние неподрессоренных масс на движение автомобиля, использовать эквивалентные силовые факторы, вводимые при «разрыве» подвески. Для определения силового взаимодействия масс системы условно «разрежем» автомобиль на подрессоренные и неподрессо-

ренные массы. Очевидно, что границы такого раздела пройдут по элементам подвески (в нашем случае — двухрычажной независимой каждого из колес). Из курса сопротивления материалов известно, что две системы являются эквивалентными при равенстве силовых факторов, действующих на систему и вызываемых ими перемещениях. Таким образом, при разрыве связей необходимо ввести заменяющие их силовые факторы (схемы рис. 2 и 3).

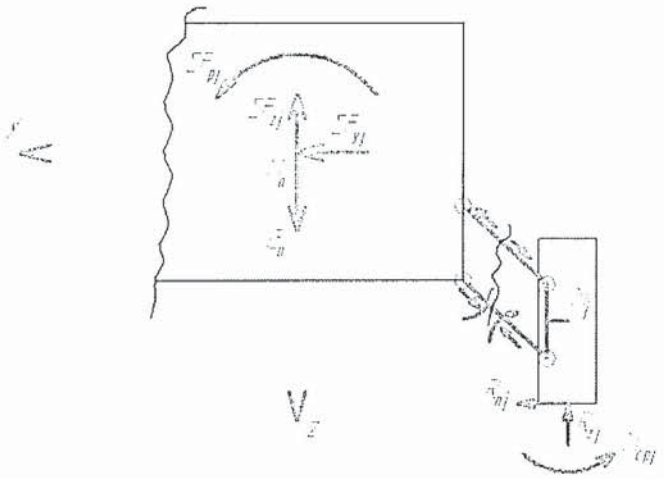

Рис. 2. Силовые факторы, возникающие при разрыве подвески (вид спереди, схематично)

Очевидно, что на подрессоренную и неподрессоренную массы при этом будут действовать равные по величине и противоположные по направлению силы (таким образом, при суммировании они взаимно сокращаются, что подтверждает внутренний характер этих сил по отношению к системе). Также логично предположить, что силовые факторы, вводимые при разрыве подвески, будут каким-то образом приложены вдоль ее рычагов (в случае линейных сил) или представлять собой скручивающие и изгибающие моменты, действующие на рычаги подвески. В любом случае величина и направление приложения данных силовых факторов будут зависеть от направляющего аппарата подвески, что не слишком удобно при расчетах необходимо учитывать геометрию подвески. Поэтому целесообразно указанные силовые факторы привести к центру подрессоренных масс, тогда при составлении уравнений движения подрессоренной массы каждый из указанных силовых факторов будет главной и единственной силой (моментом), действующей на каждом из линейных (угловых) перемещений системы. Очевидно, что приведенные силы и моменты не являют собой реакции в пятне контакта колеса с дорогой по соответствующему направлению в чистом виде, а учитывают влияние каждой реакции через кинематические характеристики подвески, а также инерционной составляющей от движения неподрессоренной массы. Поэтому при составлении уравнений движения неподрессоренной массы необходимо в качестве внешних сил принимать каждую из приведенных сил (моментов), введенных при разрыве подвески, противоположную по направлению действующей на кузов автомобиля, с учетом кинематических характеристик подвески (поскольку приведенные силовые факторы приложены в центре подрессоренной массы).

Полная потенциальная энергия системы определяется суммой потенциальных энергий от продольного и поперечного крена и вертикального перемещения подрессоренной массы

$$U = \left(c_{y12}a_{p12}^2 + c_{y34}a_{p34}^2 + c_{y56}a_{p56}^2\right)p^2 + \left(c_{y12}a_{r12}^2 + c_{y56}a_{r56}^2\right)r^2 + \\ + \left(c_{y12}a_{z12}^2 + c_{y34}a_{z34}^2 + c_{y56}a_{z56}^2\right)z^2. \quad (12)$$

Поскольку расчетная модель автомобиль не является консервативной системой, т. е. сумма кинетической и потенциальной энергий изменяется при движении системы, необходимо определить диссипативную функцию Релея.

Принимая пропорциональность между силой сопротивления амортизатора и скоростью относительного перемещения его поршня и допуская линейную зависимость между последней и обобщенной скоростью $\dot{q}_i$, определим диссипативную функцию Релея при вертикальном перемещении подрессоренной массы

$$R_z = \left(k^c_{a12}b^2_{z12} + k^c_{a34}b^2_{z34} + k^c_{a56}b^2_{z56}\right)V_z^2, \text{ при } V_z > 0 \qquad (13^{\mathrm{I}})$$

$$R_z = \left(k^o_{a12}b^2_{z12} + k^o_{a34}b^2_{z34} + k^o_{a56}b^2_{z56}\right)V_z^2, \text{ при } V_z < 0 \qquad (13^{\mathrm{II}})$$

Для поперечного крена

$$R_p = \frac{1}{2}\left(k^c_{a12}b^2_{p12} + k^o_{a12}b^2_{p12} + k^c_{a34}b^2_{p34} + k^o_{a34}b^2_{p34} + k^c_{a56}b^2_{p56} + k^o_{a56}b^2_{p56}\right)\dot{p}^2. \qquad (14)$$

Аналогично для продольного крена подрессоренной массы

$$R_r = \left(k^o_{a12}b^2_{r12} + k^c_{a56}b^2_{r56}\right)\dot{r}^2, \text{ при } r > 0 \qquad (15^{\mathrm{I}})$$

$$R_r = \left(k^c_{a12}b^2_{z12} + k^o_{a56}b^2_{z56}\right)\dot{r}^2, \text{ при } r < 0 \qquad (15^{\mathrm{II}})$$

Далее определим частные производные потенциальной энергии для подрессоренной и неподрессоренных масс по обобщенным координатам и диссипативной функции по обобщенным скоростям.

Обобщенные силы уравнений Лагранжа определим как отношения работ внешних сил dA_i к соответствующим возможным перемещениям dq_i. Согласно внешним силам, показанным на рис. 1 и внутренним силам, динамически связывающим подрессоренную и неподрессоренные массы (рис. 2 и 3), обобщенная сила Q_x для подрессоренной массы на возможном перемещении dx составит (с учетом производных подвески)

$$Q_x = \sum F_{xj} - P_w, \qquad (16^{\mathrm{I}})$$

где θ_j — угол поворота колеса (равен 0 для колес средней оси, отрицателен для колес задней оси); P_w — сила аэродинамического сопротивления.

Обобщенная сила Q_y на возможном перемещении dy равна

$$Q_y = \sum F_{yj}. \qquad (16^{\mathrm{II}})$$

Для перемещения dz

$$Q_z = G_a - \sum F_{zj}. \qquad (16^{\mathrm{III}})$$

Аналогично для остальных перемещений

$$Q_p = M_e - \sum F_{pj}, \qquad (16^{\mathrm{IV}})$$

$$Q_r = \sum F_{rj}, \qquad (16^{\mathrm{V}})$$

$$Q_\psi = \left(R_{n1} + R_{n2}\right)L\cos\theta_{12} - \left(R_{n5} + R_{n6}\right)L\cos\theta_{56} + \left(R_{n2} - R_{n1}\right)\frac{B}{2}\sin\theta_{12} +$$
$$+\left(R_{n5} - R_{n6}\right)\frac{B}{2}\sin\theta_{56} + \left(R_{t1} - R_{t2}\right)\frac{B}{2}\cos\theta_{12} + \left(R_{t3} - R_{t4}\right)\frac{B}{2} + \left(R_{t5} - R_{t6}\right)\frac{B}{2}\cdot\cos\theta_{56} + \qquad (16^{\mathrm{VI}})$$
$$+\sum R_{tj}\frac{B}{2}\cdot\sin\theta_j - \sum F_{\psi j}.$$

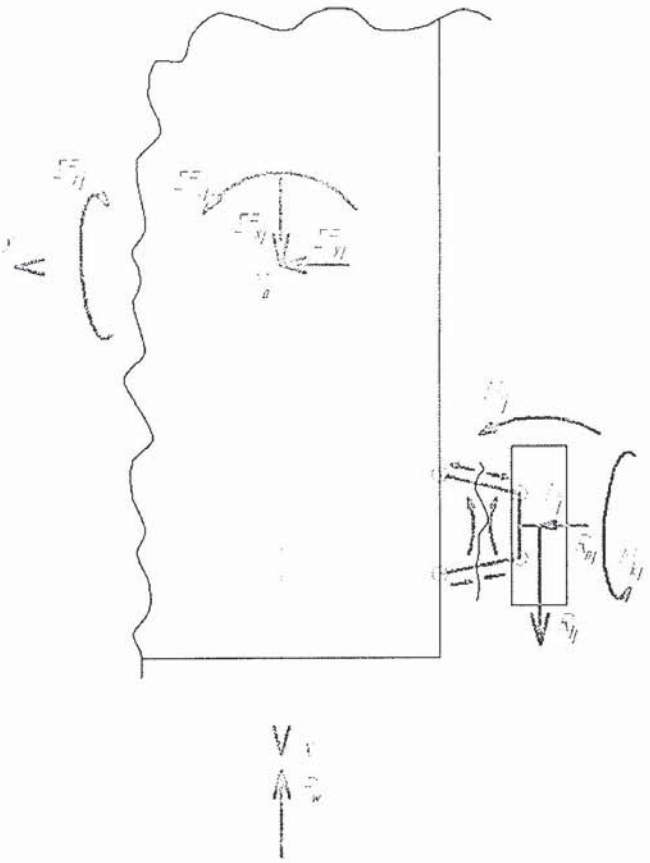

Рис. 3. Силовые факторы, возникающие при разрыве подвески (вид сверху, схематично).

Для неподрессоренной массы

$$Q_{xj} = R_{tj}\cos\theta_j - R_{nj}\sin\theta_j - F_{xj}, \qquad (17^{\mathrm{I}})$$

$$Q_{yj} = R_{nj}\cos\theta_j + R_{tj}\sin\theta_j - F_{yj}, \qquad (17^{\mathrm{II}})$$

$$Q_{zj} = k_j^{zx}F_{xj} - k_j^{zy}F_{yj} + k_j^{zz}F_{zj} - k_j^{zp}F_{pj} + k_j^{z\psi}F_{\psi j} - R_{zj}, \qquad (17^{\mathrm{III}})$$

$$\begin{aligned} Q_{pj} &= k_j^{px}F_{xj} - k_j^{py}F_{yj} + k_j^{pz}F_{zj} + k_j^{pp}F_{pj} - k_j^{p\psi}F_{\psi j} - \\ &- k_{cp}\left(k_j^{pp}p - k_j^{rp}r - k_j^{zp}z\right), \end{aligned} \qquad (17^{\mathrm{IV}})$$

$$Q_{rj} = k_j^{rx}F_{xj} - k_j^{ry}F_{yj} + k_j^{rz}F_{zj} - k_j^{rp}F_{pj} + k_j^{r\psi}F_{\psi j} - M_{ckj}, \qquad (17^{\mathrm{V}})$$

$$Q_{\psi j} = F_{\psi j} - M_{\delta j}, \qquad (17^{\mathrm{VI}})$$

где k_{cp} — коэффициент сопротивления развалу, $k_{cp}\left(k_j^{pp}p - k_j^{rp}r - k_j^{zp}z\right) = k_{cp}p_j$ — момент сопротивления развалу, M_{ckj} — момент сопротивления качению j-го колеса, $M_{\delta j}$ — момент сопротивления повороту j-го колеса, F_{xj}, F_{yj}, F_{zj}, F_{pj}, F_{rj}, $F_{\psi j}$ — силовые факторы, заменяющие связи подвески, приведенные к центру масс кузова.

Запишем уравнения Лагранжа в окончательном виде. Для подрессоренной массы* уравнение движения по обобщенной координате x (q_1)

* Для подрессоренной массы приведено уравнение движения по первой обобщенной координате, остальные уравнения см. в приложении 2, там же.

$$m_0\begin{bmatrix}\dot V_x-\dot\psi V_y+\dot r V_z-\left(\dot\psi^2+\dot r^2\right)x_0+\left(\dot r\dot p-\ddot\psi\right)y_0+\\+\left(\ddot r+\dot\psi\dot p\right)z_0\end{bmatrix}=\sum F_{xj}-P_w \tag{18}$$

(потенциальная энергия и диссипативная функция на данном перемещении равны нулю).

Для неподрессоренной массы* уравнение движения по обобщенной координате $x\ (q_1)$

$$m_j\begin{pmatrix}\dot V_x+\ddot r z'_{0j}+k_j^{rz}\ddot r r+k_j^{rz}\dot r^2+k_j^{pz}\ddot r p+k_j^{pz}\dot r\dot p+k_j^{zz}\ddot r z+\\+k_j^{zz}\dot r V_z-\ddot\psi y'_{0j}+k_j^{ry}\ddot\psi r+k_j^{ry}\dot\psi\dot r+k_j^{py}\ddot\psi p+\\+k_j^{zy}\ddot\psi z-k_j^{z\psi}V_z y'_{0j}+k_j^{z\psi}k_j^{ry}\dot V_z r+\\+k_j^{z\psi}k_j^{py}\dot V_z p+k_j^{z\psi}k_j^{py}V_z\dot p+k_j^{z\psi}k_j^{zy}\dot V_z\cdot z+k_j^{z\psi}k_j^{zy}V_z^2+\\+k_j^{p\psi}\ddot p y'_{0j}-k_j^{p\psi}k_j^{ry}\ddot p r-k_j^{p\psi}k_j^{ry}\dot p\dot r-k_j^{p\psi}k_j^{ry}\ddot p p-\\-k_j^{p\psi}k_j^{ry}\dot p^2-k_j^{p\psi}k_j^{zy}\ddot p z-k_j^{p\psi}k_j^{zy}\dot p V_z+k_j^{r\psi}\ddot r y'_{0j}-\\-k_j^{r\psi}k_j^{ry}\ddot r r-k_j^{r\psi}k_j^{ry}\dot r^2-k_j^{r\psi}k_j^{py}\ddot r p-k_j^{r\psi}k_j^{py}\dot r\dot p-\\-k_j^{r\psi}k_j^{zy}\ddot r z-k_j^{r\psi}k_j^{zy}\dot r V_z+k_j^{zx}\dot V_z+k_j^{rx}\ddot r+k_j^{px}\ddot p\end{pmatrix}-$$

$$-m_j\begin{pmatrix}V_y+k_j^{zp}V_z z'_{0j}+k_j^{zp}k_j^{rz}V_z r+\\+k_j^{zp}k_j^{pz}V_z p+k_j^{zp}k_j^{zz}V_z z-k_j^{pp}z'_{0j}\dot p-k_j^{pp}k_j^{rz}\dot p r-k_j^{pp}k_j^{pz}\dot p p-\\-k_j^{pp}k_j^{zz}\dot p z+k_j^{rp}z'_{0j}\dot r+k_j^{rp}k_j^{rz}\dot r r+k_j^{rp}k_j^{pz}\dot r p+k_j^{rp}k_j^{zz}\dot r z+\\+\dot\psi x'_{0j}+k_j^{rx}\dot\psi r+k_j^{px}\dot\psi p+k_j^{zx}\dot\psi z+k_j^{z\psi}V_z x'_{0j}+k_j^{z\psi}k_j^{rx}V_z r+\\+k_j^{z\psi}k_j^{px}V_z p+k_j^{z\psi}k_j^{zx}V_z z-k_j^{p\psi}\dot p x'_{0j}-k_j^{p\psi}k_j^{rx}\dot p r-k_j^{p\psi}k_j^{px}\dot p p-\\-k_j^{p\psi}k_j^{zx}\dot p z-k_j^{r\psi}\dot r x'_{0j}-k_j^{r\psi}k_j^{rx}\dot r r-k_j^{r\psi}k_j^{px}\dot r p-k_j^{r\psi}k_j^{zx}\dot r z\end{pmatrix}\times$$

$$\times\left(\dot\psi+k_j^{z\psi}V_z-k_j^{p\psi}\dot p-k_j^{r\psi}\dot r\right)+ \tag{19}$$

$$+m_j\begin{pmatrix}k_j^{zz}V_z-\dot r x'_{0j}-k_j^{rx}\dot r r-k_j^{px}\dot r p-k_j^{zx}\dot r z-\\-k_j^{zp}V_z y'_{0j}+k_j^{zp}k_j^{ry}V_z r+k_j^{zp}k_j^{py}V_z p+k_j^{zp}k_j^{zy}V_z z-\\-k_j^{rp}\dot r y'_{0j}+k_j^{rp}k_j^{ry}\dot r r+k_j^{rp}k_j^{py}\dot r p+k_j^{rp}k_j^{zy}\dot r z+k_j^{pp}\dot p y'_{0j}-\\-k_j^{pp}k_j^{ry}\dot p r-k_j^{pp}k_j^{py}\dot p p-k_j^{pp}k_j^{zy}\dot p z+k_j^{rz}\dot r\end{pmatrix}\dot r=$$

$$=R_{tj}\cos\theta_j-R_{nj}\sin\theta_j-F_{xj}.$$

Таким образом, мы получаем систему, состоящую из шести уравнений движения для каждой из масс — уравнения (18) для подрессоренной массы и группа уравнений (19) для каждой из неподрессоренных масс j). Совместное решение уравнений этой системы представляет собой математическую модель движения автомобиля.

* Для неподрессоренной массы приведено уравнение движения по первой обощенной координате, остальные уравнения см. в приложении 2, там же.