№ 1 2006

620.10

О КРИТЕРИЯХ АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ И НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Канд. физ.-мат. наук, ст. препод. Н.В. МИНАЕВА

Рассматривается механическая система с n степенями свободы при фиксированных внешних нагрузках. Показано, что для случая консервативных систем проверку адекватности можно проводить в рамках стационарной модели, а для неконсервативных систем при проверке адекватности решения задачи статики следует переходить к динамике.

The mechanical system with n degrees of freedom is considered at the fixed exterior loadings. It is shown, that checkout of adequacy can be yielded for a case of conservative systems within the limits of stationary model, and for no conservative systems at checkout of adequacy of a static problem solution it is necessary to transfer towards dynamics.

Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы, находящуюся под постоянным воздействием постоянных сил. Пусть поведение этой системы описывается решением системы дифференциальных уравнений, записанной в следующей математической форме:

$$A(q,\lambda)\ddot{q} = G(p,\lambda,q) + B(q,\dot{q},\lambda) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$q(0) = \xi; \ \dot{q}(0) = \eta, \tag{2}$$

где A — квадратная матрица размерности $n \times n$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

характеризующая инерционность рассматриваемой механической системы и обладающая свойством

$$|A| \neq 0. \tag{4}$$

Матрица B — матрица-столбец

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}, \tag{5}$$

характеризующая диссипацию энергии в механической системе и обладающая свойством

$$B(q, 0, \lambda) = 0, \tag{6}$$

где G и q — матрицы-столбы

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix}; \; q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Вектор p характеризует учитываемые внешние воздействия, а вектор λ описывает как саму механическую систему, так и способ осуществления рассматриваемого внешнего воздействия (угол наклона силы, эксцентриситет и т.п.).

Пусть при $p = p^0$, $\lambda = \lambda^0$ система уравнений (1) имеет s решений

$$q = h^{(j)} = \text{const} \; (j = 1, 2, \ldots s), \tag{8}$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$\xi = h^{(j)}; \eta = 0. \tag{9}$$

Как следует из (6), решение (8) задачи (1), (2), (9) в действительности являются решением при $p = p^0$, $\lambda = \lambda^0$ уравнений статики

$$\begin{aligned} &G_1(q_1, \ldots, q_n; p, \lambda) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &G_n(q_1, \ldots, q_n; p, \lambda) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку (8) — решение задачи (10) и задачи (1), (2), (9), то для проверки его адекватности необходимо провести исследование непрерывности зависимости решения задачи (1), (2), (9) от исходных данных, т.е. от характеристик изучаемой системы λ и начальных условий ξ и η при $\xi = h^{(j)}$ и $\eta = 0$.

В результате подстановки $q = h^{(j)} + W$ в (1), (2), (9) получим следующую задачу ($h^{(j)} = \text{const}$):

$$\begin{aligned} \ddot{W} = A^{-1}(h^{(j)} + W, \lambda + \lambda')[G(h^{(j)} + W, p, \lambda + \lambda') + \\ + B(h^{(j)} + W, \dot{W}, \lambda + \lambda')], \end{aligned} \tag{11}$$

$$W(0) = W_0; \dot{W}(0) = \dot{W}_0, \tag{12}$$

где вектор λ' описывает возмущения характеристик объекта, а векторы W_0 и $\dot{W}_0$ — отклонения начальных условий от тривиальных.

Итак, следует провести исследование непрерывности зависимости решения задачи (11), (12) от λ', W_0 и $\dot{W}_0$ при $\lambda' = W_0 = \dot{W}_0 = 0$.

Произведем следующую замену

$$W = z_2; \; \dot{W} = z_1 \tag{13}$$

Тогда вместо задачи (11), (12) получаем следующую задачу

$$\dot z_1 = A^{-1}(h^{(j)} + z_2, \lambda + \lambda')[G(h^{(j)} + z_2, \lambda + \lambda', p) + B(h^{(j)} + z_1, \lambda + \lambda')], \tag{14}$$

$$\dot z_2 = z_1$$

$$z_1(0) = \dot W_0;\ z_2(0) = W_0.$$

Систему уравнений (14) запишем так:

$$\dot z_1 = A^{-1}(h^{(j)} + z_2, \lambda)[G(h^{(j)} + z_2, \lambda, p) + B(h^{(j)} + z_2, z_1\lambda)] + R(h^{(j)}, z_1, z_2, \lambda'),$$

$$\dot z_2 = z_1, \tag{15}$$

где

$$R(h^{(j)} + z_2, z_1, p, \lambda') = A^{-1}(h^{(j)} + z_2, \lambda + \lambda')[G(h^{(j)} + z_2, p, \lambda + \lambda') + B(h^{(j)} + z_2, z_1\lambda + \lambda')] - A^{-1}(h^{(j)} + z_2, \lambda) \times [G(h^{(j)} + z_2, p, \lambda) + B(h^{(j)} + z_2, z_1\lambda)]. \tag{16}$$

Из (16) следует, что $R \to 0$ при $\lambda' \to 0$.

Итак, исследование непрерывности зависимости решения (8) задачи (1), (2), (9) от исходных данных сведено исследованию непрерывности зависимости тривиального решения задачи (15) при $R \equiv 0$ и $W_0 = \dot W_0 = 0$ от R и $\dot W_0$ и W_0, т.е. к исследованию устойчивости тривиального решения системы (15) при $R \equiv 0$ по отношению к постоянно действующим возмущениям.

Как следует из теоремы Малкина [1], условием этой устойчивости является асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (15) при $R \equiv 0$.

Из теоремы Ляпунова следует, что для проведения исследований этой асимптотической устойчивости надо провести линеаризацию системы уравнений (15) или (11), при $\lambda' = 0$.

Линеаризованное уравнение, соответствующее (11) при $\lambda' = 0$, будет следующим

$$A(h^{(j)}, \lambda)\ddot W - B'(h^{(j)}, 0, \lambda)\dot W - G'(h^{(j)}, \lambda, p)W = 0, \tag{17}$$

где G' и B' — матрицы Якоби

$$G' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial G_n}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_n}{\partial q_n} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial B_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial B_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial B_n}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial B_n}{\partial q_n} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее системе уравнений (17), будет иметь вид

$$\left|\mu^2 A^{-1}(h^{(j)}, \lambda^0) - \mu B'(h^{(j)}, 0, \lambda^0) - G(h^{(j)}, p^0, \lambda^0)\right| = 0. \qquad (19)$$

Итак, необходимым условием адекватности решений (8), согласно теореме Ляпунова, является условие отрицательности вещественных частей корней характеристического уравнения (19).

В большинстве исследований поведения деформируемых систем используются математические модели, не учитывающие диссипацию энергии, т.е. при $B = 0$.

В этом случае линеаризованное уравнение относительно возмущений (17) примет следующий вид:

$$A(h^{(j)}, \lambda)\ddot{W} - G'(h^{(j)}, p, \lambda)W = 0, \qquad (20)$$

а характеристическое уравнени (19) будет таким

$$\left|\mu^2 A(h^{(j)}, \lambda) - G'(h^{(j)}, p, \lambda)\right| = 0. \qquad (21)$$

Во многих исследованиях, например, [2, 3], показано, что для случая внешних сил фиксированного направление появления корня характеристического уравнения (21) с положительной вещественной частью происходит при переходе его через нуль.

Следовательно, условие

$$\left|G'(h^{(j)}, p, \lambda)\right| = 0 \qquad (22)$$

определяет границу области D_j в пространстве компонент вектора p, для каждой точки которой вещественные части всех корней уравнения (21) равны нулю.

Отметим, что уравнение (20) описывает для точек области D_j незатухающие колебания с постоянной амплитудой около положения равновесия $q = h^{(j)}(p)$.

Для консервативных систем учет диссипации энергии в математической модели, т.е. рассмотрение уравнений (17), а не (20), приводит к тому, что для области D_j система будет описывать уже затухающие колебания (из-за диссипации энергии, а работа потенциальных сил по замкнутому контуру равна нулю). Следовательно, корни характеристического уравнения (19) для точек области D_j будут иметь отрицательные вещественные части.

Условие (22), определяющее границу области D_j, не зависит от характеристик, описывающих диссипацию энергии.

Отметим, что согласно теореме Гурвица одним из условий отрицательности вещественных частей корней уравнения (19) является следующие условие:

$$\left|G'(h^{(j)}, p, \lambda)\right| > 0. \qquad (23)$$

Поскольку учет диссипации энергии не может привести к уменьшению области устойчивости, то остальные условия Гурвица для уравнения (19) не могут определять область меньше, чем D_j.

Условие (23) принято называть статическим критерием.

Поскольку $q = h^{(j)}(p)$ — решение системы уравнений (10), то статический критерий (22) является условием нарушения непрерывности зависимости решения задачи (10) от исходных данных.

Для неконсервативных систем (например, для случая следящих внешних сил) также существует область D_j, для каждой точки которой корни характеристического уравнения (21) имеют нулевые вещественные части. Отмечено, например, [2, 3], что границы этой области уже не соответствуют случаю, когда $\mu = 0$. Но для неконсервативных систем учет диссипации энергии, т.е. переход к системе (17), не обязательно должен привести к тому, что система (17) будет описывать затухающие колебания для всех точек области D_j. Это явление получило название «эффект дестабилизирующего влияния вязкости», хотя это просто говорит о том, что не всегда особый по Ляпунову случай можно относить к устойчивым.

Итак, для случая, когда внешние силы постоянного направления, исследования адекватности решений уравнений статики можно проводить в рамках статики .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1960. — 339 с.
3. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. — М.: Наука, 1979. —384 с.

621.822

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИДРОСТАТОДИНАМИЧЕСКИХ ОПОР В УСЛОВИЯХ ДВУХФАЗНОГО СОСТОЯНИЯ СМАЗОЧНОГО МАТЕРИАЛА

Канд. техн. наук, доц. О.В. СОЛОМИН

Представлены теоретические основы и методология расчета динамических характеристик (коэффициентов жесткости и демпфирования) подшипников жидкостного трения в условиях смазки криогенными жидкостями (водород, кислород, и т.п.). Приведены результаты расчета, иллюстрирующие влияние парожидкостного состояние смазочного материала на динамические характеристики опор жидкостного трения. Обсуждаются возможности применения полученных результатов к решению задач динамики роторов (АЧХ, границ устойчивости, критических частот и т.д.).

This article represents theoretical basis and methodology of calculation of dynamic characteristics (stiffness and damping coefficients) of fluid-film bearings under condition of lubrication by cryogenic liquids (hydrogen, oxygen, etc.). Results of calculation, which illustrate influence of two-phase steam-liquid condition of the lubricant on dynamic characteristics, are presented. Usage of these results and the developed methodology to solution of rotor dynamic problems (amplitude-frequency characteristic, boundary of stability, critical frequencies etc.) are discussed.

В настоящее время гидростатодинамические подшипники находят широкое применение в качестве опор высокоскоростных роторов турбоагрегатов длительного ресурса [1—5]. При этом одной из основных задач, возникающих при их проектировании и расчете роторных систем, является обеспечение устойчивости радиальных движений рото-