

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.376

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Д-р физ-мат. наук, проф. В. П. РАДЧЕНКО, канд. физ-мат. наук, доц. Н. Н. ПОПОВ

На основе метода линеаризации в корреляционном приближении получено решение плоской задачи установившейся ползучести стохастически неоднородной среды. Стохастичность введена в определяющее соотношение установившейся ползучести при помощи случайной функции двух переменных. Проведено исследование случайного поля напряжений для плоскости при двухосном нагружении в зависимости от степени неоднородности и показателя нелинейности материала, а также параметра нагружения. Найдены оценки средних значений и дисперсий случайного поля деформаций.

On basic of linearization method in correlation approach the solution was found for flat task of steady-state creep of stochastically nonuniform medium. Stochasticity used in determined ratio of steady-state creep by means of two variables function. Depend upon the degree of nonuniform and index of nonlinearity as well as parameter of weighting the research of random stress field was made for flatness under biaxial stress. Marks of average values and dispersion of random deformation field was found.

Вопросы расчета на прочность и надежность элементов конструкций в условиях ползучести требуют полной информации о реологических характеристиках материалов, носящих явно выраженный стохастический характер, начиная с атомно-молекулярного уровня и заканчивая уровнем элемента конструкций [1—4]. Широко используемые для оценки ресурса безопасной эксплуатации элементов конструкций феноменологические теории ползучести, как правило, носят детерминированный характер и не учитывают явления разброса для деформации ползучести, перемещений, времени разрушения и т.д. Неточности детерминированного расчета на прочность покрываются, например, назначением коэффициента запаса прочности, который во многих случаях выбирается без достаточных оснований. Отсюда естественным образом возникает задача разработки методов решения стохастических краевых задач ползучести и методик оценки показателей надежности элементов конструкций на их основе.

Существующие подходы решения стохастических краевых задач ползучести базируются на методе статистических испытаний (метод Монте-Карло), который требует большого объема экспериментальных данных, и сводятся к многократному численному решению детерминированных краевых задач для сгенерированных случайных реализаций с последующей статистической обработкой результатов [5—7]. Однако при численных методах решения краевых задач безусловно часто теряется внутренняя суть задачи, всеобъемлющая трактовка результатов в зависимости от варьируемых параметров. В этом плане аналитические методы решения стохастических краевых задач ползучести позволяют в более полном объеме трактовать и полученные результаты, и место этих результатов (в целом) в анализируемом явлении. Поэтому нами был выбран аналитический подход к решению стохастических краевых задач установившейся ползучести применительно к задаче о двухос-

ном растяжении плоскости из стохастически неоднородного материала. При этом вводятся ограничения о малости упругих деформаций и считается, что ими допустимо пренебречь. Частный случай этой задачи при равномерном растяжении плоскости в направлении главных осей рассматривался в [8].

Определяющее соотношение ползучести принимается в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения в стохастической форме [8]

$$\dot{p}_{ij} = cs^{n-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{mm} \right) (1 + \alpha U(x_1, x_2)), \quad (1)$$

где s — интенсивность напряжений,

$$s^2 = 0,5(3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}),$$

p_{ij} — компоненты тензора деформаций ползучести, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, δ_{ij} — символ Кронекера, $U(x_1, x_2)$ — случайная однородная функция, описывающая реологические свойства материала с математическим ожиданием $\langle U \rangle = 0$ и дисперсией $\langle U^2 \rangle = 1$; α — число, играющее роль коэффициента вариации реологических свойств материала; c, n — постоянные материала; точка означает дифференцирование по времени. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2)$$

а компоненты тензора скоростей деформаций \dot{p}_{ij} — условиям

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}\dot{p}_{jk,il} = 0, \quad (3)$$

которые получаются из уравнений совместности для деформаций путём дифференцирования по времени. Здесь Λ_{ij} — единичный антисимметричный псевдотензор

$$\Lambda_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть тензор напряжений представлен в виде суммы детерминированного слагаемого σ_{ij}^0 и флуктуации σ_{ij}^*

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0, \quad \langle \sigma_{ij}^* \rangle = 0. \quad (4)$$

Далее нелинейная задача ползучести (1)—(3) линейризуется относительно флуктуаций напряжений. С целью физической линейризации функция s^{n-1} разлагается в степенной ряд и в этом разложении учитываются только линейные члены. Для стохастической линейризации определяющего соотношения (1) использовалось корреляционное приближение теории случайных функций, т.е. предполагалось, что произведения вида $\sigma_{ij}^* \sigma_{kl}^*$, $\alpha U \sigma_{ij}^*$ допустимо пренебречь. В итоге определяющие соотношения ползучести (1) будут иметь вид

$$\dot{p}_{11} = \frac{1}{3} cs_0^{n-1} (l_1 + 2\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^* + (\sigma_{11}^* l_1 + \sigma_{22}^* l_2) k_1 + \alpha U l_1),$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{22} &= \frac{1}{3} c s_0^{n-1} \left(l_2 + 2\sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + (\sigma_{11}^* l_1 + \sigma_{22}^* l_2) k_2 + \alpha U l_2 \right), \\ \dot{p}_{12} &= c s_0^{n-1} \sigma_{12}^*; \end{aligned} \quad (5)$$

где $s_0^2 = (\sigma_{11}^0)^2 + (\sigma_{22}^0)^2 - \sigma_{11}^0 \sigma_{22}^0$, $l_1 = 2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0$, $l_2 = 2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0$, $k_i = \frac{(n-1)l_i}{2s_0^2}$.

Флуктуации тензора скоростей деформаций $\dot{p}_{ij}^* = \dot{p}_{ij} - \dot{p}_{ij}^0$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \dot{p}_{11}^* &= \frac{1}{3} c s_0^{n-1} \left(2\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^* + (\sigma_{11}^* l_1 + \sigma_{22}^* l_2) k_1 + \alpha U l_1 \right), \\ \dot{p}_{22}^* &= \frac{1}{3} c s_0^{n-1} \left(2\sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + (\sigma_{11}^* l_1 + \sigma_{22}^* l_2) k_2 + \alpha U l_2 \right), \\ \dot{p}_{12}^* &= c s_0^{n-1} \sigma_{12}^*, \end{aligned} \quad (6)$$

а флуктуации тензора напряжений, согласно (2), (4), удовлетворяют уравнениям

$$\sigma_{ij,j}^* = 0. \quad (7)$$

Если в уравнения совместности для флуктуаций скоростей деформаций $\Lambda_{ij} \Lambda_{kl} \dot{p}_{jk,il}^* = 0$ подставить соотношения (6), то можно получить

$$\begin{aligned} \sigma_{11,22}^* (2 + k_1 l_1) + \sigma_{22,22}^* (-1 + k_1 l_2) + \sigma_{11,11}^* (-1 + k_2 l_1) + \\ + \sigma_{22,11}^* (2 + k_2 l_2) - 6\sigma_{12,12}^* = -\alpha (U_{,22} l_1 + U_{,11} l_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Если ввести функцию напряжений F для флуктуаций тензора напряжений

$$\sigma_{11}^* = F_{,22}, \quad \sigma_{22}^* = F_{,11}, \quad \sigma_{12}^* = -F_{,12}, \quad (9)$$

то вместо системы (7),(8) получим единственное дифференциальное уравнение относительно функции F

$$F_{,1111} (2 + k_2 l_2) + 2F_{,1122} (2 + k_1 l_2) + F_{,2222} (2 + k_1 l_1) = -\alpha (U_{,22} l_1 + U_{,11} l_2). \quad (10)$$

Пусть функция $U(x_1, x_2)$, с помощью которой задается случайное поле возмущений механических свойств материала, является однородной и изотропной. Тогда она допускает спектральное представление в виде интеграла Фурье—Стилтьеса [9]

$$U(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\varphi(\omega_1, \omega_2), \quad (11)$$

причем для случайного дифференциала $d\varphi(\omega_1, \omega_2)$ выполняется условие стохастической ортогональности

$$\langle d\varphi(\omega_1, \omega_2) \overline{d\varphi(\omega'_1, \omega'_2)} \rangle = S_U(\omega_1, \omega_2) \delta(\omega_1 - \omega'_1) \delta(\omega_2 - \omega'_2) d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2,$$

где $S_U(\omega_1, \omega_2)$ — спектральная плотность поля, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, а черта означает комплексное сопряжение.

При быстро изменяющемся случайном поле микронеоднородностей $U(x_1, x_2)$ решение линеаризованной задачи (10) также будет однородным и его можно искать в виде

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} a(\omega_1, \omega_2) d\varphi(\omega_1, \omega_2), \quad (12)$$

где $a(\omega_1, \omega_2)$ — неизвестная весовая функция, которую можно вычислить из линейного уравнения при подстановке представлений (11), (12) в соотношение (10)

$$a\omega_1^4(2+k_2l_2) + 2a\omega_1^2\omega_2^2(2+k_1l_2) + a\omega_2^4(2+k_1l_1) = \alpha(\omega_2^2l_1 + \omega_1^2l_2). \quad (13)$$

Из (13) получаем

$$a = \frac{\alpha(\omega_2^2l_1 + \omega_1^2l_2)}{\omega_1^4(2+k_2l_2) + 2\omega_1^2\omega_2^2(2+k_1l_2) + \omega_2^4(2+k_1l_1)}.$$

Таким образом, компоненты тензора флуктуаций напряжений согласно (9), (12) можно вычислить по формулам

$$\sigma_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} a_{mn}(\omega_1, \omega_2) d\varphi(\omega_1, \omega_2), \quad (14)$$

где $a_{11} = -\omega_2^2 a$, $a_{22} = -\omega_1^2 a$, $a_{12} = \omega_1 \omega_2 a$.

При помощи (14) и известной формулы для вычисления дисперсий напряжений σ_{mn}

$$D[\sigma_{mn}] = \langle |\sigma_{mn}|^2 \rangle$$

получаем

$$D[\sigma_{mn}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_U(\omega_1, \omega_2) a_{mn}^2(\omega_1, \omega_2) d\varphi(\omega_1, \omega_2). \quad (15)$$

Спектральная плотность S_U изотропного скалярного поля U зависит только от модуля волнового вектора $\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, а для дисперсии имеет место равенство [9]

$$D_U = 2\pi \int_0^{\infty} S(\omega_0) \omega_0^2 d\omega_0 = 1.$$

Если перейти в интеграле (15) к полярной системе координат $\omega_1 = \omega_0 \cos \varphi$; $\omega_2 = \omega_0 \sin \varphi$, то он приводится к виду

$$D[\sigma_{mn}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{mn}(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi, \quad (16)$$

где R_{mn} — известная рациональная функция переменных $\sin \varphi$, $\cos \varphi$.

Анализ случайного поля напряжений был проведен при условии, что плоскость растягивается в двух взаимно ортогональных направлениях $\sigma_{11}^0 = \sigma^0$, $\sigma_{22}^0 = h\sigma^0$, где h — параметр, $h \in R$.

Для этого случая функции R_{mn} , входящие в (16), имеют вид

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= -\frac{\alpha\sigma^0 \left((2-h)\sin^2\varphi + (2h-1)\cos^2\varphi \right) \sin^2\varphi}{(2+k_2l_2)\sin^4\varphi + 2(2+k_1l_2)\cos^2\varphi\sin^2\varphi + (2+k_1l_1)\cos^4\varphi}, \\
 R_{22} &= -\frac{\alpha\sigma^0 \left((2-h)\sin^2\varphi + (2h-1)\cos^2\varphi \right) \cos^2\varphi}{(2+k_2l_2)\sin^4\varphi + 2(2+k_1l_2)\cos^2\varphi\sin^2\varphi + (2+k_1l_1)\cos^4\varphi}, \\
 R_{12} &= \frac{\alpha\sigma^0 \left((2-h)\sin^2\varphi + (2h-1)\cos^2\varphi \right) \sin\varphi\cos\varphi}{(2+k_2l_2)\sin^4\varphi + 2(2+k_1l_2)\cos^2\varphi\sin^2\varphi + (2+k_1l_1)\cos^4\varphi}, \quad (17)
 \end{aligned}$$

где $l_1 = (2-h)\sigma^0$; $l_2 = (2h-1)\sigma^0$; $s_0^2 = (h^2 - h + 1)(\sigma^0)^2$; $k_1 = \frac{(n-1)(2-h)}{2s_0^2}$; $k_2 = \frac{(n-1)(2h-1)}{2s_0^2}$.

Вычисляя численно интеграл (16) с учетом (17) для различных h , n и α , получаем значения для дисперсий напряжений. В табл. 1 приведены значения безразмерной величины $D[\sigma_{11}]/(\alpha\sigma^0)^2$ при различных h и n . Из табл. 2 следует, что разброс напряжений σ_{11} существенно зависит от величины $h = \sigma_{22}^0/\sigma_{11}^0$ и, следовательно, от напряжения σ_{22}^0 , причем эта зависимость не монотонная.

Таблица 1

Значения $D[\sigma_{11}]/(\alpha\sigma^0)^2$ при различных значениях h и n

$h \backslash n$	2	4	6	8	10	12
-4,00	1,077	0,518	0,315	0,217	0,160	0,125
-2,00	0,419	0,178	0,102	0,067	0,048	0,036
-1,00	0,204	0,076	0,041	0,027	0,019	0,014
-0,50	0,128	0,044	0,023	0,015	0,010	0,008
-0,25	0,099	0,033	0,017	0,011	0,007	0,006
0	0,078	0,025	0,013	0,008	0,005	0,004
0,25	0,065	0,021	0,011	0,007	0,004	0,003
0,50	0,060	0,021	0,011	0,007	0,005	0,003
1,00	0,060	0,031	0,019	0,012	0,009	0,007
2,00	0,037	0,024	0,018	0,014	0,012	0,010
4,00	0,222	0,161	0,127	0,105	0,089	0,077

Значения $\sqrt{D[\sigma_{11}]}/\sigma^0$, характеризующей относительную величину разброса напряжений как функцию переменных α и n при $h=2$, приведены в табл. 2. Зависимость величины $\sqrt{D[\sigma_{11}]}/\sigma^0$ от коэффициента вариации α является линейной при фиксированных значениях параметров h и n . С увеличением показателя n степенного закона ползучести величина $\sqrt{D[\sigma_{11}]}/\sigma^0$ уменьшается при любых значениях α .

Таблица 2

Значения величины $\sqrt{D[\sigma_{11}]} / \sigma^0$ при $h = 2$

$\alpha \backslash n$	2	4	6	8	10	12
0,1	0,048	0,039	0,033	0,030	0,027	0,025
0,2	0,097	0,078	0,067	0,060	0,054	0,050
0,3	0,145	0,116	0,100	0,089	0,082	0,075
0,4	0,193	0,155	0,134	0,119	0,109	0,100
0,5	0,242	0,194	0,167	0,149	0,136	0,126

Оценим величину разброса флуктуации касательного напряжения σ_{12}^* . По условию задачи детерминированная часть этого напряжения $\sigma_{12}^0 = 0$. В этом случае разброс σ_{12}^* характеризуется величиной $\sqrt{D[\sigma_{12}]} / \sigma^0$, значения которой в зависимости от α и n ($h = 2$) приведены в табл. 3. Разброс касательного σ_{12} и нормального σ_{11} напряжений имеет одинаковый порядок при фиксированных значениях α и n . Поэтому пренебрегать флуктуациями касательного напряжения σ_{12} не следует, даже если $\sigma_{12}^0 = 0$.

Таблица 3

Значения величины $\sqrt{D[\sigma_{12}]} / \sigma^0$ при $h = 2$

$\alpha \backslash n$	2	4	6	8	10	12
0,1	0,055	0,038	0,030	0,025	0,022	0,019
0,2	0,110	0,076	0,060	0,051	0,044	0,039
0,3	0,164	0,114	0,090	0,076	0,066	0,058
0,4	0,219	0,152	0,120	0,101	0,088	0,078
0,5	0,274	0,191	0,151	0,126	0,110	0,097

Выполним теперь исследование стохастических полей деформаций ползучести. Линеаризованные соотношения для деформаций ползучести при постоянном тензоре напряжений, полученные из (5),

$$p_{11} = \dot{p}_{11}t = \frac{1}{3}cs_0^{n-1}t(l_1 + 2\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^* + (\sigma_{11}^*l_1 + \sigma_{22}^*l_2)k_1 + \alpha Ul_1),$$

$$p_{22} = \dot{p}_{22}t = \frac{1}{3}cs_0^{n-1}t(l_2 + 2\sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + (\sigma_{11}^*l_1 + \sigma_{22}^*l_2)k_2 + \alpha Ul_2),$$

$$p_{12} = \dot{p}_{12}t = cs_0^{n-1}\sigma_{12}^*t,$$

можно представить в виде

$$p_{11} = \frac{1}{3}cs_0^{n-1}t(l_1 + (2 + k_1l_1)\sigma_{11}^* + (-1 + k_1l_2)\sigma_{22}^* + \alpha Ul_1),$$

$$p_{22} = \frac{1}{3} c s_0^{n-1} t (l_2 + (-1 + k_1 l_2) \sigma_{11}^* + (2 + k_2 l_2) \sigma_{22}^* + \alpha U l_2),$$

$$p_{12} = c s_0^{n-1} \sigma_{12}^* t. \quad (18)$$

Для математических ожиданий деформаций ползучести имеют место выражения

$$\langle p_{11} \rangle = p_{11}^0 = \frac{1}{3} c s_0^{n-1} l_1 t; \quad \langle p_{22} \rangle = p_{22}^0 = \frac{1}{3} c s_0^{n-1} l_2 t; \quad \langle p_{12}^0 \rangle = p_{12}^0 = 0. \quad (19)$$

На основании (18) для дисперсий деформаций ползучести получим

$$D[p_{11}] = \frac{1}{9} c^2 s_0^{2n-2} t^2 D[l_1 + (2 + k_1 l_1) \sigma_{11}^* + (-1 + k_1 l_2) \sigma_{22}^* + \alpha U l_1],$$

$$D[p_{22}] = \frac{1}{9} c^2 s_0^{2n-2} t^2 D[l_2 + (-1 + k_2 l_1) \sigma_{11}^* + (2 + k_2 l_2) \sigma_{22}^* + \alpha U l_2],$$

$$D[p_{12}] = c^2 s_0^{2n-2} t^2 D[\sigma_{12}^*]. \quad (20)$$

Преобразуем первые два уравнения из (20)

$$D[p_{11}] = \frac{1}{9} c^2 s_0^{2n-2} t^2 (D[\sigma_{11}^*] (2 + k_1 l_1)^2 + D[\sigma_{22}^*] (-1 + k_1 l_2)^2 + \alpha^2 l_1^2 +$$

$$+ 2 \langle \sigma_{11}^* U \rangle \alpha l_1 (2 + k_1 l_1) + 2 \langle \sigma_{11}^* \sigma_{22}^* \rangle (2 + k_1 l_1) (-1 + k_1 l_2) + 2 \langle \sigma_{22}^* U \rangle \alpha l_1 (-1 + k_1 l_2)),$$

$$D[p_{22}] = \frac{1}{9} c^2 s_0^{2n-2} t^2 (D[\sigma_{11}^*] (-1 + k_2 l_1)^2 + D[\sigma_{22}^*] (2 + k_2 l_2)^2 + \alpha^2 l_2^2 +$$

$$+ 2 \langle \sigma_{11}^* U \rangle \alpha l_2 (-1 + k_2 l_1) + 2 \langle \sigma_{11}^* \sigma_{22}^* \rangle (2 + k_2 l_2) (-1 + k_2 l_1) + 2 \langle \sigma_{22}^* U \rangle \alpha l_2 (2 + k_2 l_2)), \quad (21)$$

$$\text{где } \langle \sigma_{11}^* \sigma_{22}^* \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{11}(\varphi) R_{22}(\varphi) d\varphi; \quad \langle \sigma_{11}^* U \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{11}(\varphi) d\varphi; \quad \langle \sigma_{22}^* U \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{22}(\varphi) d\varphi.$$

Здесь величины R_{11} , R_{22} вычисляются по (17).

Для количественного анализа полученных результатов вычислялись доверительные интервалы по правилу «трех сигма» для деформаций $\langle p_{11} \rangle \pm 3\sqrt{D[p_{11}^*]}$, $\langle p_{22} \rangle \pm 3\sqrt{D[p_{22}^*]}$, $\langle p_{12} \rangle \pm 3\sqrt{D[p_{12}^*]}$, по формулам (19), (21) для стали 12Х18Н10Т при температуре $T = 1123$ К, $\sigma^0 = 39,24$ МПа, $n = 3,2$, $c = 6,67 \cdot 10^{-9}$ [10]. На рис. 1 приведены графики математического ожидания деформации $\langle p_{11} \rangle$ и его доверительных интервалов $\langle p_{11} \rangle \pm 3\sqrt{D[p_{11}^*]}$ при $\alpha = 0,1$ и $0,3$ для $h = 0,5$ в зависимости от времени (интервал в 70 часов).

Выводы

1. С увеличением показателя установившейся ползучести n дисперсии напряжений уменьшаются при любом значении коэффициента вариации α .

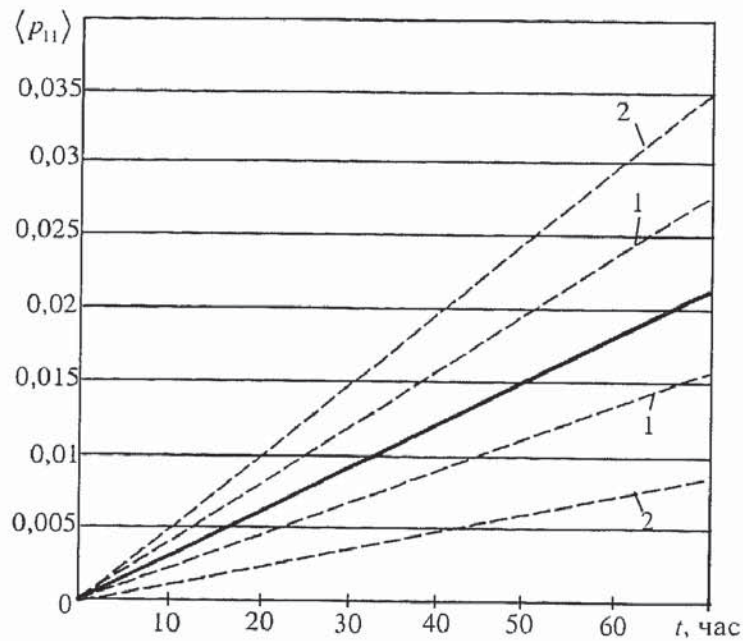


Рис. 1

2. Напряжения σ_{11} , σ_{22} (детерминированные части которых σ_{11}^0 и σ_{22}^0 являются приложенными напряжениями вдоль главных осей) взаимно влияют на дисперсии друг друга. Причем, чем больше напряжение вдоль одной оси, тем сильнее его влияние на увеличение разброса вдоль другой оси.

3. При двухосном растяжении плоскости в двух взаимно ортогональных направлениях σ_{11}^0 и σ_{22}^0 появляются случайные касательные напряжения, величина флуктуаций которых имеет тот же порядок, что и флуктуации нормальных напряжений, чего не наблюдается для детерминированного случая.

4. Полученные результаты могут служить основой при оценке надежности растягиваемых пластин в условиях установившейся ползучести, а также использоваться при интерпретации экспериментальных данных в условиях двухосного нагружения плоских образцов из реономных стохастических сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. — М.: Машиностроение, 1984. — 312 с.
2. Самарин Ю. П. О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов // Известия АН СССР. МТТ. — 1974. — № 1. — С. 88—94.
3. Бадаев А. Н. К вопросу об определении функции распределения параметров уравнения состояния ползучести // Проблемы прочности. 1984. — № 12. — С. 22—26.
4. Локощенко А. М., Шестериков С. А. Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении // Журнал прикладной механики и технической физики. — 1980. — № 3. — С. 155—159.
5. Радченко В. П., Симонов А. В., Дудкин С. А. Стохастический вариант одномерной теории ползучести и длительной прочности // Вестник СамГТУ. Серия: физико — математические науки. — Вып. 12. — 2001. — С. 73—85.
6. Радченко В. П., Симонов А. В., Кубышкина С. Н. Об одном подходе к решению стохастической краевой задачи для толстостенной трубы под действием внутреннего давления в условиях реологического деформирования и разрушения материалов // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды одиннадцатой межвузовской конференции. — Ч. 1. — Самара: СамГТУ, 2001. — С. 152—156.
7. Радченко В. П., Симонов А. В. Практические аспекты применения метода статистических испытаний к решению краевых задач с учетом реологических свойств материалов // Обзорение прикладной и промышленной математики. Материалы 2 Всероссийского симпозиума по промышленной и прикладной математике. — М.: Изд-во ТВП, 2001. — Т. 8. — Вып. 1. — С. 299.

8. Кузнецов В. А. Ползучесть стохастически неоднородных сред в условиях плоского напряженного состояния // Математическая физика. — Куйбышев: КуАИ, 1976. — С. 107—110.
9. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. — М.: Наука, 1968. — 464 с.
10. Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник/ Под ред. С.А. Шестерикова. — М.: Машиностроение, 1983. — 101 с.

666.1.4: 681.7.068.4

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ СТЕКЛОМАССЫ

Канд. техн. наук, доц. В.А. ИЛЬИЧЕВ

Исследуется процесс вытяжки тонких стержней из разогретой стекломассы. Решается стационарная задача поведения стекломассы в зоне формирования оптических стержней. Задача сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка относительно скорости. Уравнение не может быть проинтегрировано в замкнутом виде, поэтому, для нахождения решения использовалась система Рунге-Кутты. Решение позволяет вводить в полученное дифференциальное соотношение возмущения различных управляющих факторов. Таким образом, можно проследить, как меняется с течением времени отклик радиуса сечения волокна в определенном сечении на возмущение вязкости и найти распределение функции отклика радиуса сечения по длине волокна в произвольный фиксированный момент времени.

Process of extraction of pin-type rods from fluid glass is examined. Stationary problem of glass melt behavior in a zone of optical rods formation is solved. It's reduced to integration of a nonlinear differential second-degree equation against velocity. The equation cannot be integrated in a self-contained aspect; hence, for finding a solution the Runge-Kuttg system was used. Perturbations of various operating factors could be introduced into the obtained differential relation owing to the solution. Thus, it is possible to trace the response of beam cross-section radius in certain circumstances on viscous resistance and find a distribution of the response function of cut radius throughout the fiber length in the arbitrary fixed instant.

Рассматривается процесс вытяжки оптических стержней из разогретой стекломассы. Качество стержней зависит от множества физических и технологических факторов, оптимальное значение которых обеспечивается системой управления процессом вытяжки [1]. Для решения задач управления в выбранной области параметров необходимо знать статические и динамические свойства объекта управления. Статические свойства определяются чувствительностью процесса к различного рода возмущениям, в том числе и технологических параметров, в установившемся состоянии. Автором ищутся решения для установившегося движения стекломассы в зоне формирования оптического стержня.

В работе [2] показано, что основные характеристики в зоне формирования оптического стержня при установившемся движении могут быть определены для модели одномерного потока из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dv} &= \frac{3\mu - v^2 \lambda \rho}{p - \lambda \rho g v} \\ \frac{dp}{dv} &= \frac{\rho(v p - 3\mu g)}{p - \lambda \rho g v} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$