

$\varphi_k = \frac{2\pi(k-1)}{n_\omega}$; n_ω — число потоков в планетарной передаче; $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_{q1}, \varphi_{q2}, \varphi_{za}, \varphi_{zb},$

$\varphi_{za1}, \varphi_{za2}$ — фазовые углы, задающие первоначальную ориентацию погрешностей зубчатых колес в передаче; z_q — число зубьев сателлита; $\omega'_a, \omega'_b, \omega'_q$ — частоты проявления погрешностей зубчатых колес, с^{-1} .

Таким образом, получена математическая модель формирования текущего значения кинематической погрешности планетарной передачи, которая позволяет на стадии проектирования выявлять звенья, вносимые в амплитудно-частотную характеристику передачи, максимальные значения на определенных частотах.

621.864.8

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДВУХМАССОВОГО ВИБРАЦИОННОГО РОБОТА*

*Д-р техн. наук, проф. С.Ф. ЯЦУН, канд. техн. наук, доц. В.Я. МИЩЕНКО,
канд. техн. наук, докторант Д. И. САФАРОВ*

Исследуется поведение двухмассовой вибрационной системы, моделирующей динамику вибрационного мобильного робота, состоящего из двух масс, связанных между собой упругим элементом и электромагнитным приводом. Оба корпуса снабжены реверсивными механизмами свободного хода, обеспечивающими асимметрию силы трения, между корпусами робота и опорной поверхностью.

This paper shows the mathematical model of two masses vibrating robot which can be used for in pipe inspection and results of numerical calculations of motion of the robot dependence on some parameters. This robot has electro-magnetic vibrating drive and nonlinear spring connecting the masses of robot.

Вибрационные роботы просты по конструкции и не требуют специальных движителей, таких, как колеса, гусеницы или ноги. Это делает вибрационные роботы перспективными для движения не только по поверхностям, но и внутри плотных сред, препятствующих проникновению робота. Возможно, микророботы подобного типа найдут применение в медицине: например, для перемещения диагностического датчика в сосудистой системе и внутренних полостях с целью мониторинга пораженного участка и доставки лекарственного препарата к нему.

Мобильные устройства, которые могут передвигаться без специальных движителей, взаимодействуя с внешней средой непосредственно своим корпусом, в последнее время привлекают внимание исследователей. Большой цикл работ [1—11] посвящен роботам, представляющим собой цепь жестких звеньев, соединенных между собой вращательными шарнирами, в которых расположены приводы. Эти приводы создают управляющие моменты, внутренние по отношению к многозвеннику. Между многозвенником и поверхностью, по которой он движется, действует сухое трение. Управляя моментами в шар-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 04-01-04002 и 05-08-33382) и Немечского научно-исследовательского общества (DFG) (проект №Zi. 540/6-1).

нирах и тем самым силой трения, приложенной к механизму, можно обеспечить его перемещение из произвольного начального состояния в заданное конечное положение. В [7] исследованы управляемые прямолинейные движения по шероховатой плоскости системы двух тел, взаимодействующих между собой посредством управляющей силы.

В [13, 14] рассматривается прямолинейное движение по горизонтальной шероховатой плоскости тела с подвижной внутренней массой, которая также перемещается вдоль прямой, параллельной линии движения тела. Необходимая для движения в заданном направлении асимметрия силы трения обеспечивается зависимостью значения коэффициента трения от знака скорости составляющих тел системы. В [15, 18] исследована динамика робота, состоящая из системы двух тел, соединенных упругим элементом с линейной характеристикой. Движение возбуждается гармонической силой, действующей между телами.

Исходная механическая модель

Нами было исследовано поведение двухмассовой вибрационной системы, моделирующей динамику вибрационного мобильного робота, состоящего из двух твердых тел, связанных между собой упругим элементом и электромагнитным приводом. Под действием электромагнитного привода тела совершают колебательное движение. Для получения поступательного движения робота по шероховатой поверхности каждое тело снабжено устройством, создающим асимметрию силы трения. Такого эффекта можно достигнуть, например, снабжая контактные поверхности робота специальными чешуйчатыми (игольчатыми) накладками с нужной ориентацией чешуек (иголок). Асимметрию трения также можно получить, применив механизмы свободного хода. В качестве опорной поверхности можно использовать направляющие, выполненные в виде проволоки или трубы с различным профилем.

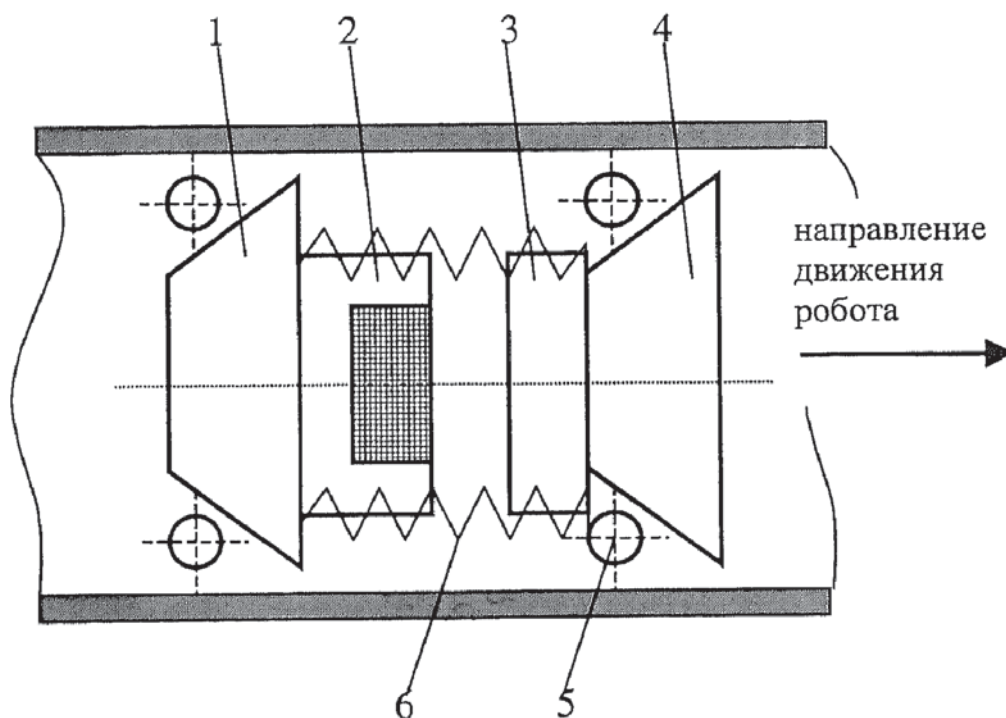


Рис. 1 Схема двухмассового вибрационного робота, перемещающегося в трубе

Схема робота, перемещающегося в трубе, приведена на рис. 1. Корпус робота состоит из двух частей 1 и 4, связанных между собой упругим элементом 6. Каждое тело снабжено механизмами свободного хода 5, обеспечивающими асимметрию силы трения между

корпусом робота и опорной поверхностью. Электромагнитный привод состоит из П-образного сердечника с катушкой 2, установленного на теле 1, и якоря 3, закрепленного на теле 4.

Движение робота происходит за счет периодического сближения тел, под действием силы электромагнитного привода. При этом тело 1 приближается к телу 4, которое благодаря работе механизма свободного хода останавливается. После отключения электрического питания, под действием пружины б масса 4 отходит от тела 1, которое остается на месте благодаря работе собственного механизма свободного хода.

Таким образом, происходит перемещение центра масс робота.

Математическая модель вибрационного робота

Расчетная схема робота представлена на рис 2. На массу m_1 действуют силы: электромагнитного привода Q_1 , упругого элемента P_1 , вязкого сопротивления R_1 . На массу m_2 соответственно действуют силы Q_2 , P_2 , R_2 . Очевидно, что эти силы попарно равны по модулю и противоположны по знаку. Кроме этих сил, на массы m_1 и m_2 действуют силы сухого трения F_1 и F_2 .

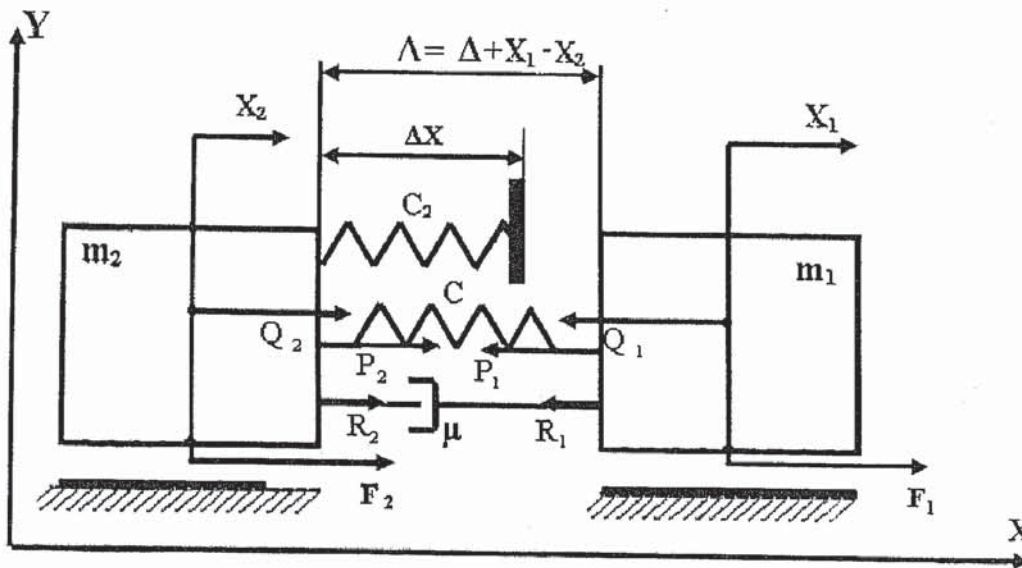


Рис. 2. Расчетная схема робота

В качестве задающего воздействия выступают периодические силы Q_1 и Q_2 . Эти силы являются внутренними и вызывают вибрационное движение масс m_1 и m_2 относительно центра масс системы. Движение центра масс происходит в результате того, что силы трения, действующие на корпус робота, являются внешними и имеют разные модули в зависимости от направления скорости. Поэтому их интеграл за период не равен нулю, что приводит к возникновению поступательного движения робота в положительном направлении по оси OX .

Запишем дифференциальные уравнения движения масс робота

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 &= -P_1 - R_1 + F_1 - Q_1, \\ m_2 \ddot{X}_2 &= P_2 + R_2 + F_2 + Q_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь двумя точками обозначены производные по времени от обобщенных координат.

Если сложить эти уравнения, то получим уравнение движения центра масс робота

$$m_1 \ddot{X}_1 + m_2 \ddot{X}_2 = F_1 + F_2, \text{ так как}$$

$$m_1 \ddot{X}_1 + m_2 \ddot{X}_2 = m \ddot{X}_c, \text{ то}$$

$$m \ddot{X}_c = F_1 + F_2, \quad (2)$$

где $m = m_1 + m_2$ — масса робота, X_c — координата центра масс.

Собственные частоты линейной системы, при отсутствии сил сопротивления, определяются по формуле [18]

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \mp \sqrt{\frac{1}{4}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 + \frac{m_1}{m_2} \lambda_2^4}, \quad (3)$$

где λ_1, λ_2 — парциальные частоты,

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{c}{m_1}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{c}{m_2}}. \quad (4)$$

Анализ формулы (2) показывает, что движение центра масс робота возможно в трех случаях, если

$$\begin{aligned} &1) F_1 = 0 \quad F_2 \neq 0, \\ &2) F_2 = 0 \quad F_1 \neq 0, \\ &3) F_1 \neq 0 \quad F_2 \neq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения характера движения масс робота найдем силы, приложенные к массам (рис. 2). В рассматриваемой схеме упругий элемент выполнен кусочно-линейным. Это сделано для того, чтобы при перемещении масс навстречу друг другу сердечник и якорь не соударялись между собой. Изменяя жесткость упругого ограничителя C_2 , можно управлять процессом соударения двух масс. Так, при увеличении жесткости C_2 время удара уменьшается и в пределе стремится к нулю.

Построим модель силы упругости. Как видно из рис. 3, дополнительная пружина с жесткостью C_2 включается в работу в зависимости от соотношения между расстоянием между массами Λ и величиной ΔX . Значение Λ определим следующим образом:

$$\Lambda = \Delta + X_1 - X_2, \quad (6)$$

где Δ — расстояние между массами при недеформированной пружине; X_1, X_2 — обобщенные координаты.

Если $\Lambda > \Delta X$, то деформируется только пружина с жесткостью C и имеет место безударный режим движения. В противном случае, когда $\Lambda < \Delta X$, происходит скачкообразное изменение жесткости, что приводит к быстрому изменению скорости масс m_1 и m_2 , поэтому такое движение можно отнести к виброударному.

Модель силы упругости представим в следующем виде

$$P_1 = \begin{cases} C(X_1 - X_2) & \text{если } \Lambda > \Delta X \\ C(X_1 - X_2) + C_2(\Delta + X_1 - X_2 - \Delta X) & \Lambda < \Delta X \end{cases} \quad (7)$$

$$P_2 = -P_1$$

На рис. 3 приведены зависимости сил упругости P_1, P_2 от расстояния между массами Λ . При $\Lambda = \Delta$ система находится в положении статического равновесия и силы упругости равны нулю.

При $\Lambda = \Delta X$ происходит соприкосновение массы m_1 с пружиной C_2 , при этом силы упругости равны P_{10} и P_{20} . В этой точке суммарная жесткость упругого элемента возрастает при дальнейшем уменьшении Λ .

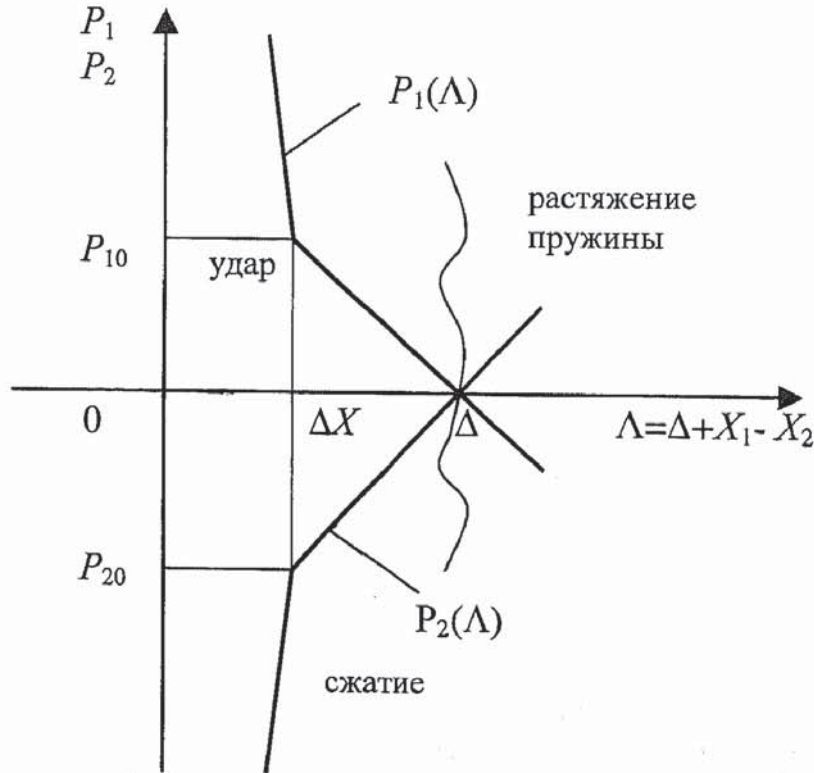


Рис. 3. Зависимость силы упругости от расстояния между массами

Модель силы вязкого сопротивления представим в виде

$$R_1 = \mu(V_1 - V_2), \quad (8)$$

$$R_2 = -R_1,$$

где μ — коэффициент вязкого сопротивления, $v_i = dX_i/dt$ — скорости масс m_1 и m_2 .

Представим модель силы трения в следующей форме:

$$F_i = \begin{cases} F_i & \text{if } \dot{X}_i < 0 \\ 0 & \text{if } \dot{X}_i > 0 \\ F_i^* & \text{if } \dot{X}_i = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$i = 1, 2$

где F_i^* — сила трения покоя, определяемая из условия равновесия сил, действующих на остановившуюся i -ую массу; \dot{X}_i — скорость i -ой массы. Например, сила F_1^* определяется по формуле

$$F_1^* = R_1 + P_1 + Q_1,$$

Для определения силы электромагнитного привода воспользуемся формулой Максвелла

$$Q_1 = \frac{\partial W}{\partial \Delta}, \quad (10)$$

где W — энергия магнитного поля, запасенная в воздушных зазорах электромагнита.

Будем считать, что энергия магнитного поля зависит только от величины магнитной энергии, запасенной в рабочих зазорах. Гистерезисными потерями, вихревыми токами и сопротивлением в сердечнике пренебрегаем. Тогда энергия магнитного поля рассчитывается по формуле:

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV, \quad (11)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ ГН/м — магнитная постоянная; B — индукция магнитного поля; V — объем воздушного зазора.

Для определения объема воздушного зазора необходимо знать геометрию магнитопровода. Данный робот оснащен электромагнитным приводом с П-образным сердечником, схема которого приведена на рис. 4. Полагая, что $B = \text{const}$, формулу (11) можно представить в виде

$$W = \frac{B^2 V}{2\mu_0} = \frac{\Phi^2 \Delta}{\mu_0 S}, \quad (12)$$

где Φ — магнитный поток, S — площадь воздушного зазора.

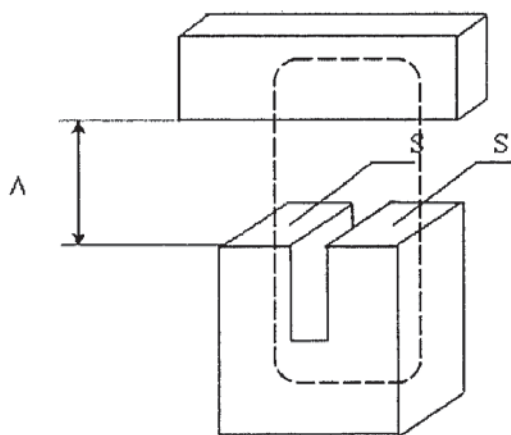


Рис. 4. Схема электромагнитного привода робота с П-образным сердечником

Подставляя (12) в (10), получим

$$Q_1 = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}. \quad (13)$$

Для определения потока Φ запишем следующее уравнение:

$$\Phi + RI = u(t). \quad (14)$$

Данное уравнение устанавливает связь между напряжением электрического питания и магнитным потоком.

Ток, возникающий в электрической цепи, определим по формуле

$$I = \frac{\partial W}{\partial \Phi} = \frac{2\Phi\Lambda}{\mu_0 S}. \quad (15)$$

Для определения напряжения питания, поступающего на катушку электромагнита, рассмотрим схему подключения катушки к источнику периодического напряжения (рис. 5).

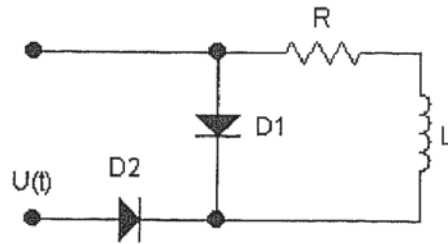


Рис. 5. Схема подключения электромагнита к источнику электрического питания

На схеме приняты следующие обозначения: D1, D2 — диоды; R, L — активное сопротивление и индуктивность катушки, $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$, напряжение электрического питания (U_0 — амплитуда, ω — частота напряжения питания).

В соответствии со схемой подключения, напряжение, поступающее на катушку электромагнита $u(t)$, будем моделировать следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} U_0 \sin(\omega t) & \text{если } U(t) > 0 \\ 0, & \text{если } U(t) < 0 \end{cases} \quad (16)$$

Система уравнений, описывающая динамику движения масс робота, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\Phi} + RI = u(t) \\ m_1 \ddot{X}_1 = -P_1 - R_1 + F_1 - Q_1 \\ m_2 \ddot{X}_2 = P_2 + R_2 + F_2 + Q_2 \end{cases} \quad (17)$$

Представим размерные переменные, входящие в систему уравнений (17) в безразмерном виде, для этого введем следующие обозначения: $\tau = \omega t$, $X = X_0 \cdot \bar{X}$, $\dot{X} = X_0 \omega \cdot \dot{\bar{X}}$, $\ddot{X} = X_0 \omega^2 \cdot \ddot{\bar{X}}$, $U(t) = U_0 \cdot \bar{U}$, $\Phi = \Phi_0 \cdot \bar{\Phi}$, где τ — безразмерное время; X_0 — масштаб длины; U_0 — масштаб электрического напряжения; Φ_0 — масштаб потока. Переменные с чертой являются безразмерными.

Система дифференциальных уравнений (17) с учетом (7), (8), (9), (13) в безразмерной форме принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{\Phi}} = \varepsilon \cdot \bar{u}(\tau) - \beta(\bar{\Delta} + (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)) \cdot \bar{\Phi} \\ \ddot{\bar{X}}_1 = -\zeta(\dot{\bar{X}}_1 - \dot{\bar{X}}_2) - \bar{P}_1 - \chi \cdot \bar{\Phi}^2 + \bar{F}_1 \\ \ddot{\bar{X}}_2 = \bar{m} \cdot \zeta(\dot{\bar{X}}_1 - \dot{\bar{X}}_2) - \bar{P}_2 + \bar{m}\chi \cdot \bar{\Phi}^2 + \bar{m} \cdot \bar{F}_2 \end{cases} \quad (18)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{U_0}{\Phi_0 \omega}; \quad \beta = \frac{2X_0 R}{\mu_0 S \omega}; \\ \xi &= \frac{C}{\omega^2 m_1} = \frac{\lambda_1^2}{\omega^2}; \quad \chi = \frac{(\Phi_0)^2}{\mu_0 S X_0 \omega^2 m_1}; \\ \bar{m} &= \frac{m_1}{m_2}; \quad \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{X_0}; \quad \zeta = \frac{\mu}{m_1 \omega}. \end{aligned} \quad (19)$$

Безразмерные параметры ε , β , ξ , χ , ζ , \bar{m} , $\bar{\Delta}$ и $\bar{\Delta} \chi$ задают закон движения робота.

Параметр β определяется электрическими диссипативными свойствами электромагнитного привода робота, ζ зависит от потерь в упруго-вязком элементе. Параметр ξ определяется отношением квадрата парциальной частоты первой массы робота к квадрату частоты внешнего воздействия. Параметр χ задает амплитуду электромагнитной силы, \bar{m} — параметр, определяемый отношением масс робота, $\bar{\Delta}$ — $\bar{\Delta} \chi$ — безразмерный зазор между массами, определяемый в недеформированном положении пружины.

Далее изучается влияние параметров ξ и ε на среднюю скорость установившегося движения робота. Остальные параметры приняты постоянными.

Решение уравнений (18) выполняется численным методом, алгоритм которого основан на методе Адамса с адаптивным шагом интегрирования.

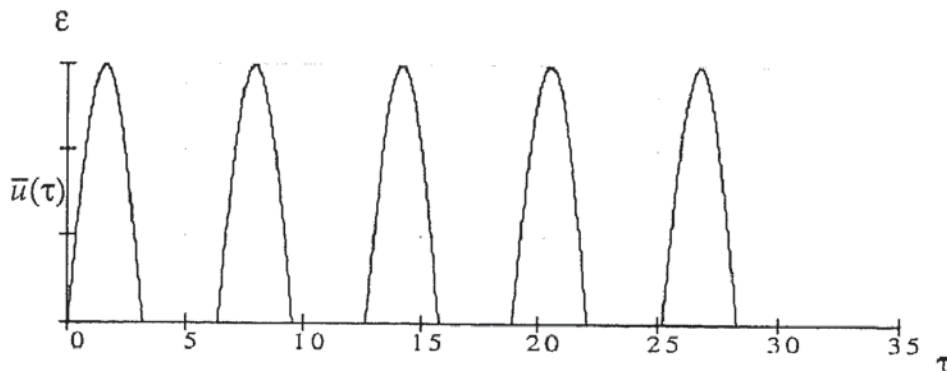


Рис. 6. Форма электрического напряжения подаваемого на обмотку катушки

Расчеты выполнены для следующих параметров:

$$U_0 = 12V; \quad X_0 = 0,01 \text{ м}, \quad m_1 = m_2 = 0,1 \text{ кг}, \quad \Delta = 1, \quad \Delta X = 0, \quad \beta = 50, \quad \omega = 1.$$

Электрическое напряжение, прикладываемое к обмотке катушки, изменяется по закону, показанному на рис. 6.

На первом этапе исследовались безударные режимы движения робота.

На рис. 7 приведены зависимости средней скорости установившегося движения робота в зависимости от параметра ξ для четырех значений амплитуды электрического питания ε . Анализ этих зависимостей показал, что в области $\xi = 0,5$ наблюдается резкое увеличение скорости робота. Это соответствует основному резонансу рассматриваемой системы, который наступает при совпадении собственной частоты и частоты внешнего воздействия $p = \omega$. Так как $\bar{m} = 1$, то $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда, с учетом (3), (4), получим $p_1^2 = 0$, $p_2^2 = 2\lambda_1^2$. Второй пик увеличения скорости наблюдается при $\xi = 2$, что соответствует резонансу, который наступает при условии $p = 2\omega$. Третий пик соответствует условию $p = 3\omega$ или $\xi = 4,5$.

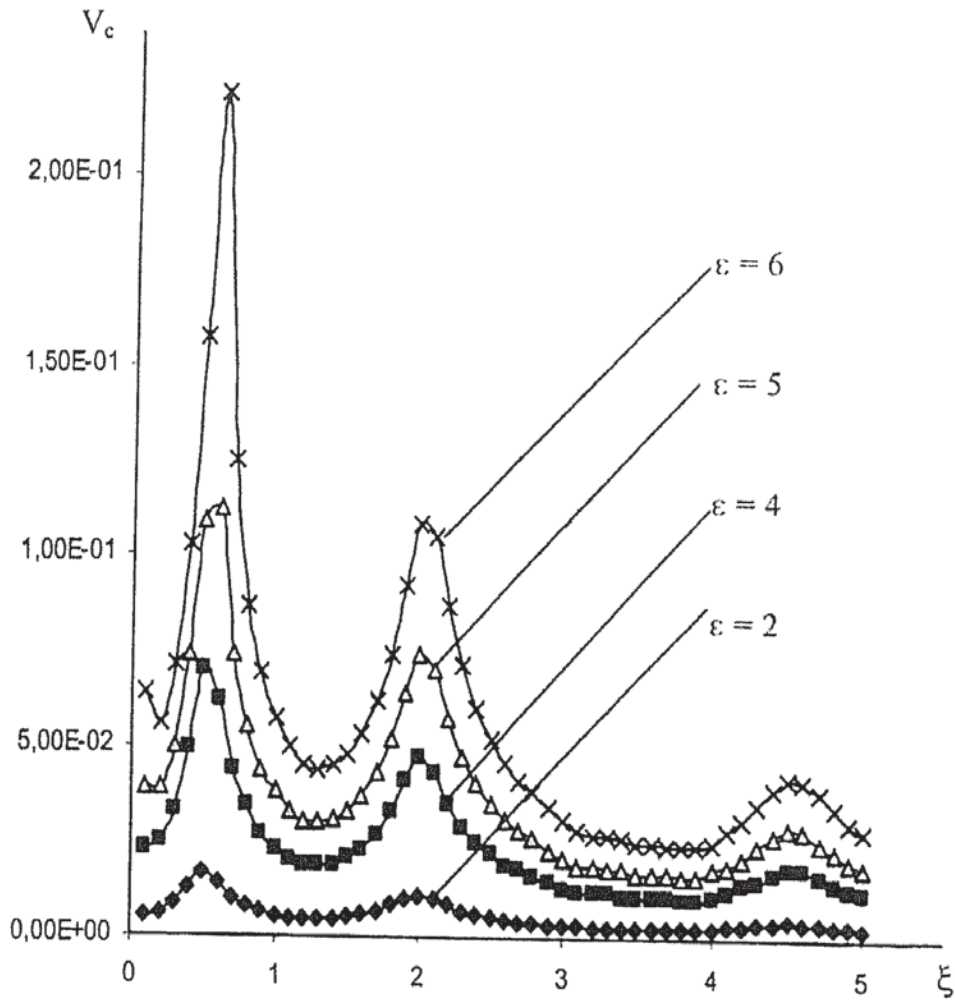


Рис. 7. Зависимость средней скорости виброробота v_c от безразмерного параметра ξ для различных уровней электрического питания

На рис. 8—10 приведены зависимости мгновенных скоростей масс робота от времени. Анализ этих зависимостей показывает, что устойчивые периодические режимы устанавливаются приблизительно через 3 безразмерных периода. В области $\xi = 0,4—0,7$ колебания обеих масс происходят с частотой внешнего периодического воздействия. На рис. 8 показаны зависимости мгновенных скоростей масс робота от времени τ для $\xi = 0,6$.

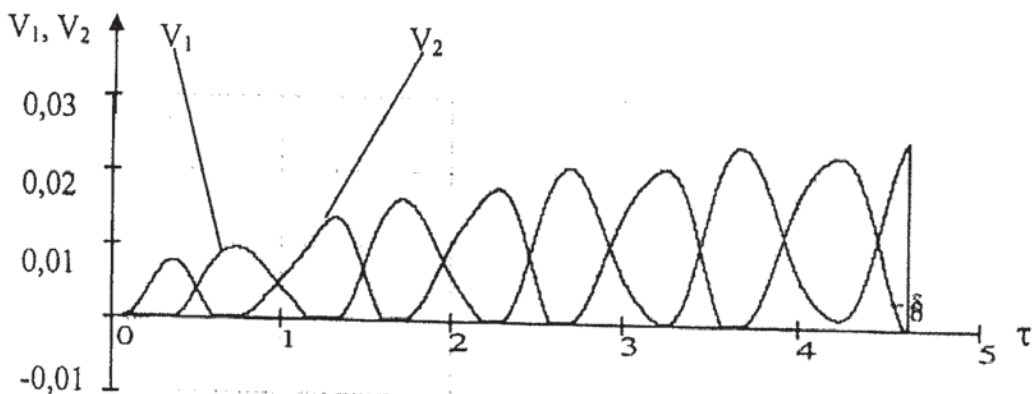


Рис. 8. Зависимость мгновенных скоростей v_1 и v_2 от безразмерного времени τ ($\xi = 0,6$; $\epsilon = 2$)

Характер колебаний изменяется при переходе в область значений, близких к $\xi = 1,0$ — $1,8$. В этом интервале система совершает два колебания за период внешнего воздействия (рис. 9).

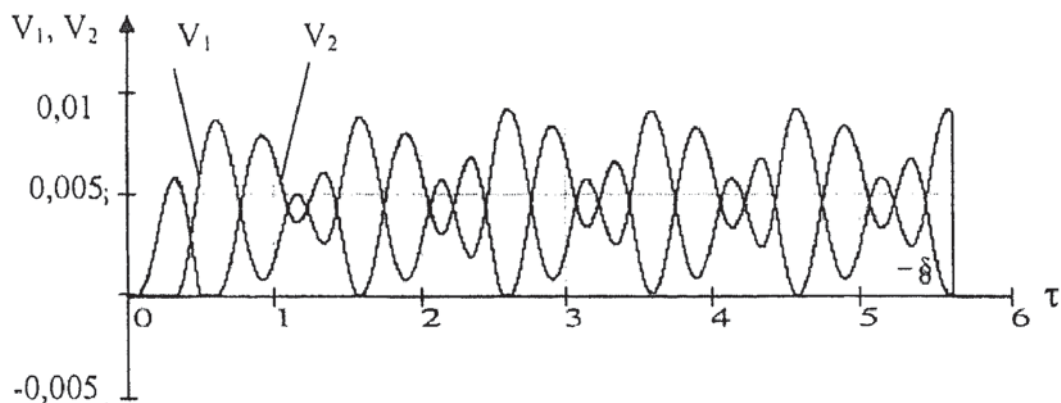


Рис. 9. Зависимость мгновенных скоростей v_1 и v_2 от безразмерного времени τ ($\xi = 1,3$; $\epsilon = 2$)

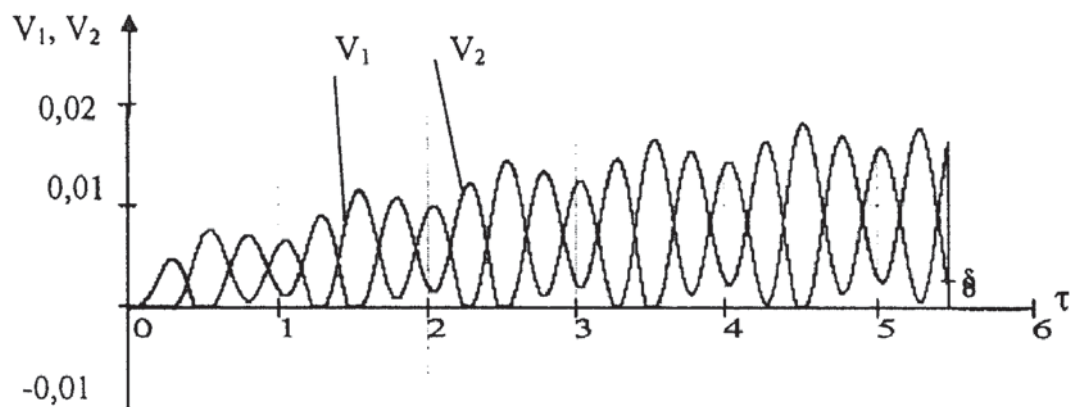


Рис. 10. Зависимость мгновенных скоростей v_1 и v_2 от безразмерного времени τ ($\xi = 2$; $\epsilon = 2$)

В области $\xi = 2$ система также совершает два колебания за период внешнего воздействия (рис. 10), но амплитуда второго колебания значительно выше, чем в предыдущем случае. Этот факт объясняет рост скорости в данном диапазоне параметров. Наибольшее значение скорости установившегося движения робота соответствует узкой области, $\xi = 0,5$ — $0,6$, причем зона максимума практически не зависит от напряжения питания, подаваемого на катушку электромагнита.

Выводы

1. Установлено, что двухмассовый виброробот при наличии асимметричного сухого трения на контакте его масс и шероховатой поверхности перемещается по поверхности.
2. Исследовано влияние безразмерного параметра ξ на скорость установившегося движения робота. Установлено, что имеет место резонансный характер зависимости скорости от безразмерного параметра ξ .
3. Установлено, что колебания масс зависят от величины параметра ξ . Так, в области $\xi = 0,4$ — $0,8$ массы колеблются асинхронно с частотой внешнего периодического воздействия, что обеспечивает максимальную скорость установившегося движения робота.

4. Выявлено, что с увеличением параметра ε амплитуды колебаний масс робота также возрастают. В то же время, форма колебаний масс робота не изменяется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф. Л. Движение многозвенника по горизонтальной плоскости // Прикладная математика и механика. — 2000. — Т. 64. — Вып. 1. — С. 8—18.
2. Черноусько Ф. Л. Волнообразные движения многозвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. — 2000. — Т. 64. — Вып. 4. — С. 515.
3. Черноусько Ф. Л. Движение плоского многозвенника по шероховатой горизонтальной плоскости // Доклады РАН 2000. — Т. 370.2. — С. 186—189.
4. Черноусько Ф. Л. О движении трехзвенника по плоскости // ПММ. — 2001. — Т. 65. — Вып. 1. — С. 15—20.
5. Черноусько Ф. Л. Управляемые движения двузвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2001. — Т. 65. — Вып. 4. — С. 578—591.
6. Смышляев А. С., Черноусько Ф. Л. Оптимизация движения многозвенника по горизонтальной плоскости // Известия РАН. ТисУ. 2001. — Т. 2. — С. 176—184.
7. Черноусько Ф. Л. Оптимальное прямолинейное движение двух-массовой системы // ПММ. — 2002. — Т. 66. — Вып. 1. — С. 3—9.
8. Chernousko F. L. Snake-like locomotions of multilink mechanisms // Journal of Vibration and Control. — 2003. — Vol. 9. — No. 1—2. — P. 235—256.
9. Фигурин Т. Ю. Квазистатические движения двузвенника по горизонтальной плоскости // МТТ. — 2003.1. — С. 31—41.
10. Фигурин Т. Ю. Управляемые квазистатические движения двузвенника по горизонтальной плоскости // Известия РАН. ТисУ. — 2004. — Т. 3. — С. 160—176.
11. Figurina T. Yu. Quasi-static motion of a two-link system along a horizontal plane // Multibody System Dynamics. — 2004. — Vol. 11. — № 3. — P. 251—272.
12. Фигурин Т. Ю. Управляемые медленные движения трехзвенника по горизонтальной плоскости // Известия РАН. ТисУ. — 2005. — Т. 3. — С. 149—156.
13. Черноусько Ф. Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Доклады РАН. — 2005. — Т. 405. 1. — С. 1—5.
14. Черноусько Ф. Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. — 2005. — Т. 69.
15. Zimmermann K., Zeidis I., Steigenberger J. and Huang Jianjun. An approach to the modelling of worm-like motion systems with a finite number of degrees of freedom // First Steps in Technical Realization. Proc. of the 4th International Conference of Climbing and Walking Robots, Karlsruhe. — 2001. — P. 561—568.
16. Zimmermann K., Zeidis I. and Pivovarov M. Dynamics of a nonlinear oscillator in consideration of non-symmetric Coulomb dry friction // Fifth Euromech. Nonlinear Dynamics Conference. Book of Abstracts. Eindhoven Netherlands, August 7-12. — 2005. — P. 308.
17. Zimmermann K., Zeidis I. and Steigenberger J. Mathematical model of worm-like motion systems with finite and infinite numbers of degrees of freedom // Theory and Practice of Robots and Manipulators. Proceedings of the 14th CISM IFTOMM Symposium (RoManSy 14). — 2002. — P. 7—16.
18. Магнус К. Колебания. — М.: Мир, 1982. — 304 с.